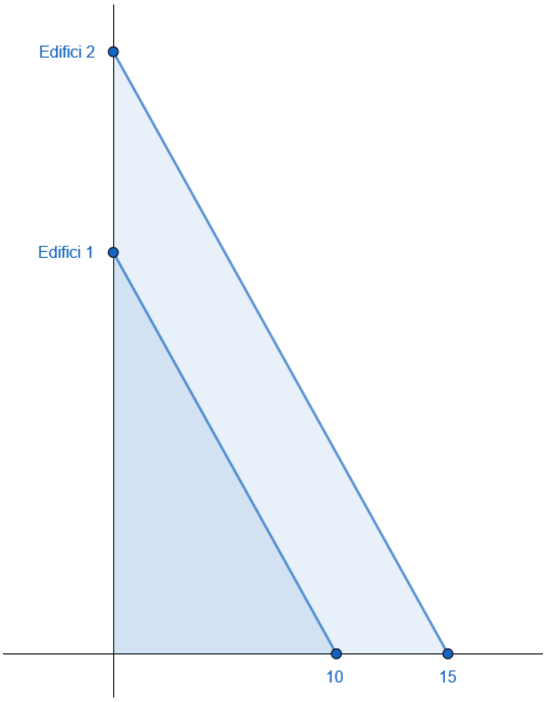
SÈRIE 2

Part 1

Responeu QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

1.



SOLUCIÓ:

Els dos triangles formats per cadascun dels edificis i les seves ombres són triangles semblants. Per tant, la proporció entre l'alçària i la longitud de l'ombra és la mateixa per a tots dos. És a dir, si h és l'alçaria del segon edifici, es té que

$$\frac{18}{10} = \frac{h}{15}$$

Per tant, el segon edifici té una alçària de $h = 27$ metres.

Puntuació: 1 punt per la relació de semblança entre els triangles. 0,5 pel càlcul de l'alçària.

2.

SOLUCIÓ:

La funció $f(x)$ és contínua i derivable perquè la gràfica de la seva derivada $f'(x)$ és contínua.

D'altra banda, a la representació gràfica de la derivada s'observa que $f'(2)=0$, a l'esquerra de $x=2$ la funció $f(x)$ és decreixent (la derivada és negativa) i a la dreta de $x=2$ la funció $f(x)$ és creixent (la derivada pren valors positius). Per tant, en $x=2$ la funció $f(x)$ assoleix un mínim perquè canvia de decreixent a creixent.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre el signe de la derivada i el creixement i decreixement de la funció. 1 punt per la relació entre el mínim i el canvi de signe de la derivada.

3.

SOLUCIÓ:

Reescrivim l'equació com

$$\sqrt{1-x}=\frac{3}{4}-1+x=x-\frac{1}{4}$$

Elevant al quadrat es té

$$1-x=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$$

S'ha de resoldre l'equació

$$x^2+\frac{1}{2}x-\frac{15}{16}=0$$

Les dues solucions de l'equació són $x=\frac{3}{4}$ i $x=\frac{-5}{4}$

Substituint el primer valor, $\boxed{x=\frac{3}{4}}$, en l'equació original es té

$$1-x+\sqrt{1-x}=1-\frac{3}{4}+\sqrt{1-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

És una solució de l'equació.

Si substituïm el segon valor, $x = \frac{-5}{4}$, en l'equació original es té

$$1 - x + \sqrt{1-x} = 1 + \frac{5}{4} + \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4}$$

No és una solució de l'equació.

Per tal que el segon valor sigui una solució, s'ha de considerar l'arrel quadrada negativa de $\sqrt{1-x}$; d'aquesta manera, al substituir, es tindria $\sqrt{1-x} = \frac{-3}{2}$, de forma que l'equació inicial quedaria:

$$1 - x + \sqrt{1-x} = 1 + \frac{5}{4} - \sqrt{1 + \frac{5}{4}} = \frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

Puntuació: Puntuació: 1,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les expressions algebraiques. No tingueu en compte el fet de no comprovar les solucions obtingudes en l'equació original i doneu per vàlides les dues solucions.

4.

SOLUCIÓ:

4.1. Es verifica que

$$\boxed{\text{a)}}\ (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^2 = \boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$$

4.2. Es compleix que

$$\boxed{\text{a)}}\ (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{A}^T$$

4.3. Els determinants de les matrius tenen la propietat

$$\boxed{\text{c)}}\ det(\boldsymbol{A}^T) = \det(\boldsymbol{A})$$

Puntuació: 0,5 punts per cada resposta correcta. Descompteu 0,25 punts per cada resposta incorrecta. Les qüestions no contestades no tenen cap descompte.

5.

SOLUCIÓ:

Dos vectors directors del pla que passa pels tres punts són

$$v_1 = P - Q = (2, -2, 2)$$

$$v_2 = P - R = (2, 2, 2)$$

Una equació del pla és la següent

$$det\begin{pmatrix} x-2 & y-0 & z-2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

Calculant el determinant es té

$$-4(x-2) + 4(z-2) + 4(y) + 4(z-2) - 4(x-2) - 4y = 0$$

$$-8(x-2) + 8(z-2) = 0$$

Una equació del pla és $\boxed{\pi: x = z}$.

El punt $T(2, 2, 2)$ pertany a la pla atès que verifica la seva equació.

Puntuació: a) 1 punt per la determinació correcta d'una equació del pla. Considereu correctes altres resolucions i expressions alternatives del pla. b) 0,5 punts. Valoreu de forma independent els errors de càlcul dels diferents apartats.

6.

SOLUCIÓ:

Una primitiva és $\boxed{F(x) = 3\sqrt{x} + \frac{1}{4}ln|x|}$ perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: Puntuació: 0,5 punts per la determinació correcta del primer sumand i 1 punt per la determinació correcta del segon sumand. En la valoració de la resposta, no tingueu en compte el valor absolut del segon sumand.

Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.

[4 punts en total]

1.

SOLUCIÓ:

Escrivim una taula amb el resum de la informació rellevant:

	Terrines de Plàtan	Terrines de Maduixa	Terrines de Mango	Disponibilitat
Sucre (gr)	15	20	25	1.000
Llet (ml)	300	200	250	11.500
Preu	6,35	5,75	6,75	

Representem

x a la quantitat de terrines de gelat de plàtan produïdes diàriament

y a la quantitat de terrines de gelat de maduixa produïdes diàriament

z a la quantitat de terrines de gelat de mango produïdes diàriament

La quantitat de sucre utilitzada s'escriu:

$$15x + 20y + 25z = 1.000$$

L'equació que descriu la llet utilitzada és

$$300x + 200y + 250z = 11.500$$

Aquesta equació es pot escriure com

$$30x + 20y + 25z = 1.150$$

Els ingressos es calculen com

$$6{,}35x + 5{,}75y + 6{,}75z = 300$$

Per tant, s'ha de resoldre el sistema

$$\begin{cases} 15x + 20y + 25z = 1000 \\ 30x + 20y + 25z = 1.150 \\ 6{,}35x + 5{,}75y + 6{,}75z = 300 \end{cases}$$

Restant la primera equació de la segona es té $15x = 150$, és a dir, $x = 10$ terrines de gelat de plàtan.

Substituint aquest valor en el sistema es té

$$\begin{cases} 20y + 25z = 850 \\ 20y + 25z = 850 \\ 5{,}75y + 6{,}75z = 236{,}5 \end{cases}$$

De la primera equació es dedueix $y = \frac{850-25z}{20} = 42{,}5 - 1{,}25z$

Substituint aquest resultat en la tercera equació tenim

$$5{,}75 \cdot (42{,}5 - 1{,}25z) + 6{,}75z = 236{,}5$$

$$244{,}375 - 7{,}1875z + 6{,}75z = 236{,}5$$

$$0{,}4375z = 7{,}875$$

Per tant, $z = 18$ terrines de gelat de mango, $y = 42{,}5 - 1{,}25 \cdot 18 = 20$ terrines de gelat de maduixa.

Cas que la producció fos $x = 10$ terrines de gelat de plàtan, $y = 40$ terrines de gelat de maduixa, $z = 2$ terrines de gelat de mango, les quantitats de sucre i llet utilitzades són les mateixes que en l'apartat anterior:

$$15x + 20y + 25z = 15 \cdot 10 + 20 \cdot 40 + 25 \cdot 2 = 1.000$$

$$300x + 200y + 250z = 300 \cdot 10 + 200 \cdot 40 + 250 \cdot 2 = 11.500$$

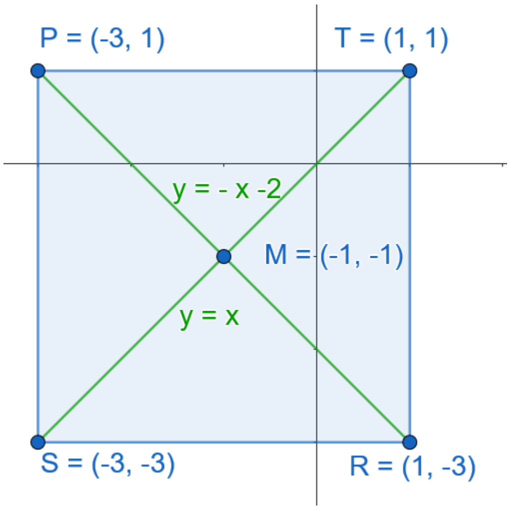
Els ingressos serien de

$$6{,}35x + 5{,}75y + 6{,}75z = 6{,}35 \cdot 10 + 5{,}75 \cdot 40 + 6{,}75 \cdot 2 = 307€$$

Puntuació: a) 1,5 punts pel plantejament del sistema d'equacions; 1,5 punts per la seva resolució. No tingueu en compte les errades de càlcul degudes a l'arrodoniment en les operacions. b) 0,5 punts pel càlcul de les matèries primeres utilitzades i 0,5 punts pel càlcul dels ingressos. Valoreu aquest apartat de forma independent dels resultats obtinguts en l'apartat anterior. És necessari comprovar que la quantitat de matèries primeres utilitzades en el segon apartat és la mateixa que la del primer apartat.

2.

SOLUCIÓ:



El punt $M(-1,-1)$ és el punt mitjà entre els vèrtexs $P(-3,1)$ i $R(x,y)$, per tant

$$M = (P+R)/2$$

$$(-1,-1) = \frac{(-3,1)+(x,y)}{2} = \frac{(x-3,y+1)}{2}$$

Es dedueix que el vèrtex R és el punt $R(1,-3)$.

La recta que passa pels punts $P(-3,1)$, $M(-1,-1)$ i $R(1,-3)$ és la recta $r\colon y = mx+n$.

Substituint els punts en l'equació es té

$$\begin{cases} 1 = m\cdot(-3)+n \\ -1 = m\cdot(-1)+n \\ -3 = m\cdot 1+n \end{cases}$$

Sumant la segona i tercera equacions es dedueix $n=-2$. Substituint aquest valor en la tercera equació es dedueix $m=-1$. Per tant, l'equació de la recta que conté els vèrtexs P i R és $r\colon y=-x-2$.

La distància entre el vèrtex $P(-3,1)$ i el punt mitjà $M(-1,-1)$ és

$$d = \sqrt{(-3+1)^2+(1+1)^2} = \sqrt{8}$$

El pendent a de la recta $s: y = ax + b$ perpendicular a r que passa pel punt $M(-1,-1)$ és $a = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$. Substituint aquest valor i el punt $M(-1,-1)$ en l'equació de la recta $s: y = ax + b$ es té $-1 = 1 \cdot (-1) + b$, d'on es dedueix $b = 0$. És a dir, la recta s té equació $s: y = x$.

Els vèrtexs S i T són dos punts de la recta s amb distància $\sqrt{8}$ del punt $M(-1,-1)$. Atès que els vèrtexs pertanyen a la recta $s: y = x$, són de la forma (x, x). Per tant, s'ha de resoldre l'equació:

$$d(P, M) = \sqrt{(x+1)^2 + (x+1)^2} = \sqrt{8}$$

Elevant al quadrat i desenvolupant es té

$$2x^2 + 4x + 2 = 8$$

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

Les dues solucions d'aquesta equació són $x = -3$ i $x = 1$. Els vèrtexs són els punts $S(-3,-3)$ i $T(1,1)$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del vèrtex R; 1 punt per l'equació de cadascuna de les diagonals; 1,5