



SÈRIE 1

Part 1

Responeu QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts per cada qüestió]

1.

SOLUCIÓ:

El domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors que verifiquen

$$2 + 5x - 3x^2 \geq 0$$

Les solucions de l'equació $2 + 5x - 3x^2 = 0$ són $x = 2$ i $x = -\frac{1}{3}$; per tant,

$$2 + 5x - 3x^2 = (-3) \cdot (x - 2)(x + \frac{1}{3}).$$

Aquest producte és positiu quan:

$$x - 2 \leq 0 \text{ i } x + \frac{1}{3} \geq 0; \text{ és a dir, } x \leq 2 \text{ i } x \geq -\frac{1}{3}$$

o bé

$$x - 2 \geq 0 \text{ i } x + \frac{1}{3} \leq 0; \text{ és a dir, } x \geq 2 \text{ i } x \leq -\frac{1}{3}, \text{ però això és impossible}$$

Per tant, el domini de la funció és el conjunt de valors que verifiquen , $x \leq 2$ i $x \geq -\frac{1}{3}$,

és a dir, el domini de la funció és l'interval tancat $\mathcal{D}(f) = \left[-\frac{1}{3}, 2\right]$.

Puntuació: 0,5 punts pel domini de l'arrel quadrada (valors positius). 0,5 punts per cadascun dels dos casos. Valoreu amb la màxima puntuació altres formes correctes de determinar l'interval de valors positius, com per exemple, una argumentació basada en una paràbola invertida.

2.

SOLUCIÓ:

a) La recta r es pot expressar com $r: (x, y, z) = (1 + \mu, 2 + \mu, 3 + \mu)$, és a dir,



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

$$\begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 3 + \mu \end{cases} \quad \text{Substituint en l'equació del pla es té:}$$

$$3x + 2y + z = 3(1 + \mu) + 2(2 + \mu) + (3 + \mu) = 10 + 6\mu = 4$$

Per tant, $\mu = -1$, i el punt d'intersecció és el punt $(1 + \mu, 2 + \mu, 3 + \mu) = (0, 1, 2)$.

b) El vector director de la recta perpendicular al pla és el vector normal del pla, és a dir $v = (3, 2, 1)$. Una equació de la recta amb aquest vector director que passa pel punt P és $s: (x, y, z) = (0, 1, 2) + \alpha(3, 2, 1)$

Puntuació: a) 0,5 punts per la caracterització dels punts de la recta; 0,5 per la determinació correcta del punt d'intersecció. b) 0,5 punts per la relació entre el vector director de la recta i el vector normal del pla. En la resposta, no tingueu en compte les possibles errades en la determinació del punt d'intersecció de l'apartat anterior. Considereu vàlides altres resolucions que caracteritzin els punts de la recta de formes alternatives, com per exemple, $\begin{cases} y = x + 1 \\ z = x + 2 \end{cases}$, i determinin el punt P a partir del sistema

$$\text{resultant} \begin{cases} y = x + 1 \\ z = x + 2 \\ 3x + 2y + z = 4 \end{cases}$$

3.

SOLUCIÓ:

$$3.1. \text{ a) } p(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 3)$$

$$3.2. \text{ b) } p(x) = x^4 - \frac{7}{2}x^3 - x^2 + \frac{13}{2}x + 3$$

$$3.3. \text{ c) } p(0) = 3$$

Puntuació: 0,5 punts per cada resposta correcta. Descompteu 0,25 punts per cada resposta incorrecta. Les qüestions no contestades no tenen cap descompte.

4.

SOLUCIÓ:

L'equació es pot escriure de la forma següent:

$$\frac{2x^2 - x - 2}{2x - 3} - (x + 1) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

Sumant les fraccions es té:



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

$$\frac{(2x^2 - x - 2) - (x + 1)(2x - 3)}{2x - 3} = \frac{1}{2x - 3} = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

Elevem al quadrat els dos termes de l'equació i operem:

$$\left(\frac{1}{2x - 3}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)^2 = \frac{1}{x}$$

$$x = (2x - 3)^2 = 4x^2 - 12x + 9$$

$$4x^2 - 13x + 9 = 0$$

Les dues solucions d'aquesta equació de segon grau són $x = \frac{9}{4}$ i $x = 1$.

Substituint el primer valor, $x = \frac{9}{4}$, en l'equació original es té

$$\frac{2x^2 - x - 2}{2x - 3} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\frac{47}{8}}{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} = \frac{47}{12} - \frac{2}{3} = \frac{39}{12} = \frac{13}{4} = x + 1 = \frac{9}{4} + 1$$

És una solució de l'equació.

Si substituïm el segon valor, $x = 1$, en l'equació original es té

$$\frac{2x^2 - x - 2}{2x - 3} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{-1} - 1 = 0 \neq x + 1 = 1 + 1$$

No és una solució de l'equació.

Per tal que el segon valor sigui una solució, s'ha de considerar l'arrel quadrada negativa de $\sqrt{\frac{1}{x}}$; d'aquesta manera, al substituir, es tindria $\sqrt{\frac{1}{x}} = -1$, de forma que l'equació inicial quedaria:

$$\frac{2x^2 - x - 2}{2x - 3} - \sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{-1}{-1} - (-1) = 1 + 1 = 2 = x + 1 = 1 + 1$$

Puntuació: 1,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les expressions algebraïques. No tingueu en compte el fet de no comprovar les solucions obtingudes en l'equació original i doneu per vàlides les dues solucions.

Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

5.

SOLUCIÓ:

Determinarem el rang de la matriu del sistema en funció del paràmetre m .

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & m \\ 1 & -m & 3 \end{pmatrix} = m^2 - 4m - 12$$

Si aquest determinant és diferent de zero, aleshores la matriu del sistema té rang 3, la matriu ampliada necessàriament tindrà el mateix rang, i tots dos rangs coincidiran amb el nombre d'incògnites. És a dir, el sistema serà compatible determinat i tindrà una única solució.

Determinem els casos en què $\det(A) = m^2 - 4m - 12 = 0$. Aquesta equació té dues solucions, $m = 6$ i $m = -2$.

Per tant, si m no és cap d'aquests dos valors, el sistema és compatible.

En el cas $m = 6$, el sistema original s'escriu:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 2x + 4y + 6z = 40 \\ x - 6y + 3z = 12 \end{cases}$$

La segona equació és el doble de la primera, per tant, el sistema és equivalent al sistema compatible indeterminat

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ x - 6y + 3z = 12 \end{cases}$$

Aquest sistema té infinites solucions.

En el cas $m = -2$, el sistema original s'escriu:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 2x + 4y - 2z = 40 \\ x + 2y + 3z = 20 \end{cases}$$

La primera i la tercera equacions són iguals, per tant, el sistema és equivalent al sistema compatible indeterminat

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 20 \\ 2x + 4y - 2z = 40 \end{cases}$$

Aquest sistema té infinites solucions.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

Per tant, no hi ha cap valor de m pel qual el sistema no tingui solució (sigui incompatible).

Puntuació: 0,5 punts per l'estudi en el cas de sistema compatible determinat; 0,5 punts pel cas $m = 6$; 0,5 punts pel cas $m = -2$. Considereu correctes altres justificacions que utilitzen mètodes alternatius, com el mètode de Gauss.

6.

SOLUCIÓ:

En primer lloc, notem que $x = -\frac{1}{4}$ pertany al domini de la funció.

Segons la condició necessària de màxim, la derivada de la funció en aquest valor ha d'anul·lar-se. En efecte,

$$f'(x) = -2 + \frac{4}{4x+3} = \frac{-8x-2}{4x+3}$$

$$f'\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{-8\left(-\frac{1}{4}\right)-2}{4\left(-\frac{1}{4}\right)+3} = 0$$

Per tal d'aplicar la condició suficient de màxim, hem de calcular la segona derivada de la funció, i comprovar que en $x = -\frac{1}{4}$ aquesta segona derivada és negativa. En efecte,

$$f''(x) = \frac{-16}{(4x+3)^2}; f''\left(-\frac{1}{4}\right) = -4 < 0$$

Puntuació: 1 punt per la condició necessària. 0,5 punts per la condició suficient. Considereu correctes altres condicions suficients, com la condició suficient de primer ordre. En les respostes, no és necessari justificar que el punt és del domini. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les derivades.

Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.

[4 punts en total]

1.

SOLUCIÓ:



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

a) La recta r que passa pels punts P i Q no és vertical ($x = k$). En forma explícita es pot escriure com $y = mx + n$. Si passa pels punts $P(0, 4)$ i $Q(4, 0)$, aleshores

$$\begin{cases} 4 = m \cdot 0 + n \\ 0 = m \cdot 4 + n \end{cases}$$

De la primera equació es té $n = 4$ i de la segona, $m = -1$. Una equació de la recta r és $y = -x + 4$.

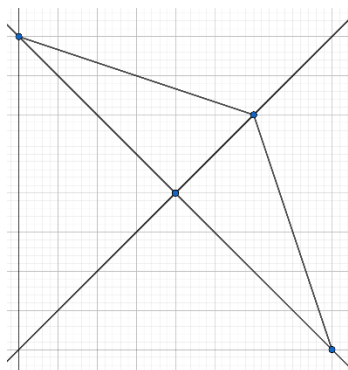
b) El punt mitjà M entre els punts P i Q és $M = \frac{P+Q}{2} = (2, 2)$.

Una equació de la recta s és $y = ax + b$. El pendent a és invers i oposat al de la recta r , per tant $a = -\frac{1}{m} = 1$; si la recta ha de passar pel punt $M(2, 2)$, aleshores

$2 = 1 \cdot 2 + b$, d'on es dedueix que $b = 0$. Per tant, la recta s és $y = x$.

c) Un punt R de la recta $s: y = x$ és de la forma $R(x, x)$. D'altra banda, la base del triangle de vèrtexs P , Q i R és la distància entre els punts P i Q :

$$d(P, Q) = \sqrt{(0-4)^2 + (4-0)^2} = 4\sqrt{2}$$



L'altura del triangle és igual a la distància de M a R , per què la recta s és perpendicular a la recta r :

$$d(M, R) = \sqrt{(x-2)^2 + (x-2)^2} = (x-2)\sqrt{2}$$

D'aquesta forma, l'àrea del triangle resulta ser:

$$A = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2}) \cdot ((x-2)\sqrt{2}) = 4(x-2) = 6$$

D'aquesta equació es té $x = \frac{7}{2}$. El punt R resulta ser $R\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

Alternativament, la distància de M a R es pot expressar com

$$d(M, R) = \sqrt{(2-x)^2 + (2-x)^2} = (2-x)\sqrt{2}$$

Aleshores tindríem que

$$A = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2}) \cdot ((2-x)\sqrt{2}) = 4(2-x) = 6$$

En aquest cas es té $x = \frac{1}{2}$; el punt R resultaria ser $\boxed{R\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$.

Puntuació.- a) 1 punt. b) 0,5 punts per la relació entre els pendents de les rectes; 0,5 punts per l'equació de la recta perpendicular c) 0,5 punts per la caracterització dels punts de la recta s ; 1 punt pels càlculs de les longituds de la base i de l'altura; 0,5 punts per la determinació correcta d'un dels dos punts R . Valoreu amb fins 1 punt una resposta basada únicament en la representació acurada del problema. Considereu correctes altres resolucions alternatives, com per exemple, una que utilitzi els vectors directores de les rectes perpendiculars. Valoreu de forma independent els errors de càlcul dels diferents apartats.

2.

SOLUCIÓ:

Determinem les primitives de $f(x)$:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int (ax + b)dx = \frac{ax^2}{2} + bx + c$$

Sabem que $F(0) = \frac{a \cdot 0^2}{2} + b \cdot 0 + c = c = 0$

D'altra banda, $F(2) = \frac{a \cdot 2^2}{2} + b \cdot 2 + c = 2a + 2b = 10$; és a dir, $a + b = 5$.

Finalment,

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1) = 10 - F(1) = 6$$

Es té que $F(1) = \frac{a \cdot 1^2}{2} + b \cdot 1 + c = \frac{a}{2} + b = 4$

S'ha de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ \frac{a}{2} + b = 4 \end{cases}$$

Restant les dues equacions, es dedueix $a = 2$, i de la primera equació es té $b = 3$.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

Per tant, $f(x) = ax + b = 2x + 3$.

Puntuació.- 1 punt per la relació entre la funció i la seva primitiva. 0,5 punts per la determinació de c .
1 punt per cadascuna de les dues equacions del sistema. 0,5 punts per la determinació correcta dels
valors a i b .