



SÈRIE 3

Part 1

Responen QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts per cada qüestió]

QÜESTIÓ 1.

Solució: Un vector director de la recta $r: 3x + 2y - 5 = 0$ és $v_1 = (2, -3)$. Un vector perpendicular a v_1 és $v_2 = (3, 2)$. Per tant, les rectes perpendiculars a la recta r tenen equació $s: 2x - 3y + A = 0$. Si la recta s ha de passar pel punt $P(1, 1)$, aleshores

$2x - 3y + A = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + A = -1 + A = 0$, d'on $A = 1$. Una equació de la recta perpendicular que passa pel punt és $s: 2x - 3y + 1 = 0$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre els coeficients de l'equació de la recta i el seu vector director. 0,5 punts per la determinació d'un vector director de la recta perpendicular. 0,5 punts per la determinació del terme independent de l'equació de la recta. Considereu correctes altres resolucions alternatives, com per exemple, una que utilitzi els pendents de la recta i de la seva perpendicular.

QÜESTIÓ 2.

Solució: S'ha de determinar el valor del paràmetre que fa que el sistema d'equacions lineals format per les tres equacions dels plans sigui un sistema compatible indeterminat, amb grau d'indeterminació igual a 1.

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ x + 2y + 2z = m \\ mx - 2y + z = 1 \end{array} \right\}$$

La matriu de coeficients del sistema ha de tenir rang igual a 2, per tant, el seu determinant ha de ser zero.

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ m & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 - 2 - 2m + 4 = -2m + 4 = 0$$

La solució de l'equació és $m = 2$.

Si $m \neq 2$, el sistema és compatible determinat i els tres plans es tallen en un punt.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

S'ha de comprovar que, quan substituïm $m = 2$, el sistema $\left. \begin{array}{l} x + z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{array} \right\}$ és compatible indeterminat, i no pas incompatible.

En efecte, de les tres equacions es té

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = \frac{2 - x - 2z}{2} = \frac{2 - 1 + z - 2z}{2} = \frac{1 - z}{2} \\ 2x - 2y + z = 2 \cdot (1 - z) - 2 \cdot \left(\frac{1 - z}{2}\right) + z = 2 - 2z - 1 + z + z = 1 \end{array} \right\}$$

És a dir, els tres plans es tallen en la recta d'equació $\left. \begin{array}{l} x = 1 - z \\ y = \frac{1 - z}{2} \end{array} \right\}$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre la posició relativa dels plans i el determinant de la matriu. 0,5 punts per la determinació correcta del valor $m = 2$. 0,5 punts per la justificació del sistema compatible indeterminat. Considereu vàlides altres formes alternatives de classificar els sistemes d'equacions, com per exemple, el càlcul correcte del rang de les matrius ampliades o l'aplicació del mètode de Gauss i la interpretació adequada dels resultats obtinguts.

QÜESTIÓ 3.

Solució:

$$\begin{aligned} \text{a) } A \cdot B &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 & (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{b) } C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 81 & 0 \\ 40 & 1 \end{pmatrix}$$

Puntuació:

Apartat a) 1 punt pel càlcul correcte del producte.

Apartat b), 0,5 punts pel càlcul correcte del producte. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades en el càlcul de qualsevol dels productes.

Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

QÜESTIÓ 4.

Solució:

Elevant els dos termes de l'equació al quadrat es té:

$$(\sqrt{15x + 151} - \sqrt{x + 137})^2 = 4^2 = 16$$

$$(15x + 151) + (x + 137) - 2(\sqrt{(15x + 151) \cdot (x + 137)}) = 16$$

$$16x + 272 = 2(\sqrt{(15x + 151) \cdot (x + 137)})$$

$$8x + 136 = \sqrt{(15x + 151) \cdot (x + 137)}$$

$$(8x + 136)^2 = (15x + 151) \cdot (x + 137)$$

$$64x^2 + 2.176x + 18.496 = 15x^2 + 2.206x + 20.687$$

$$49x^2 - 30x - 2.191 = 0$$

Les dues solucions d'aquesta equació de segon grau són $x = \frac{-313}{49}$ i $x = 7$.

Substituint el primer valor, $x = \frac{-313}{49}$, en l'equació original es té

$$\sqrt{15x + 151} - \sqrt{x + 137} = \frac{52}{7} - \frac{80}{7} = \frac{-28}{7} = -4$$

No és una solució de l'equació.

El segon valor, $x = 7$ sí és una solució perquè $\sqrt{15x + 151} - \sqrt{x + 137} = 16 - 12 = 4$

Puntuació: 1,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les expressions algebraïques. No tingueu en compte el fet de no comprovar les solucions obtingudes en l'equació original.



QÜESTIÓ 5.

Solució: $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$. Derivant la funció $F(x)$ es té:

$$F'(x) = 2 - \frac{20}{(4x+6)^2} = \frac{32x^2 + 96x + 72 - 20}{(2(2x+3))^2} = \frac{32x^2 + 96x + 52}{4(2x+3)^2} = \frac{8x^2 + 24x + 13}{(2x+3)^2}$$

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre primitiva i derivada. 1 punt pel càlcul correcte de la derivada. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus de càlcul.

QÜESTIÓ 6.

Solució: Anomenem h l'alçària del dipòsit. Aleshores, a una distància x es verifica que

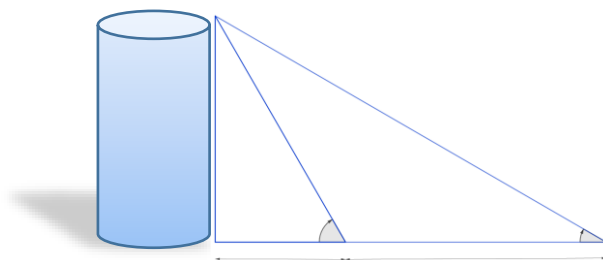
$$\operatorname{tg}(60^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} = \frac{h}{x}; \text{ d'aquesta equació es té } x = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

Augmentant la distància en 40 metres, es té

$$\operatorname{tg}(30^\circ) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x+40}; \text{ aquesta equació es pot expressar com } x = \sqrt{3}h - 40.$$

Igualant les dues equacions:

$$\frac{h}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}h - 40$$



$$h = 3h - 40\sqrt{3}$$

$$40\sqrt{3} = 2h$$

L'alçària del dipòsit és $h = 20\sqrt{3}$ metres.

Puntuació: 0,5 punts per cadascuna de les dues equacions que relacionen l'angle amb l'alçària del dipòsit. 0,5 punts per la determinació correcta de l'alçària del dipòsit.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.

[4 punts]

PROBLEMA 1.

Solució.

a) [0,5 punts]

El punt mitjà de cada costat és $M_k = \frac{1}{2}(P_j + P_l)$, on P_j i P_l són els vèrtexs adjacents del quadrat. D'aquesta manera, els quatre punts mitjans són:

$$M_1 = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = (5, 2)$$

$$M_2 = \frac{1}{2}(P_2 + P_3) = (8, 5)$$

$$M_3 = \frac{1}{2}(P_3 + P_4) = (5, 8)$$

$$M_4 = \frac{1}{2}(P_4 + P_1) = (2, 5)$$

b) [3 punts]

Per justificar que els punts mitjans determinen un quadrat, hem de comprovar que:

- 1) Els costats oposats són paral·lels dos a dos.
- 2) Els costats adjacents són perpendiculars.
- 3) La distància entre dos punts mitjans adjacents és sempre la mateixa (longitud dels costats del quadrat).

Determinant els vectors directors de cadascun dels costats es té:

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{M_2M_1} = (3, 3)$$

$$\vec{v}_2 = \overrightarrow{M_3M_2} = (-3, 3)$$

$$\vec{v}_3 = \overrightarrow{M_4M_3} = (-3, -3)$$

$$\vec{v}_4 = \overrightarrow{M_1M_4} = (3, -3)$$

- 1) Els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_3$, són proporcionals, per tant, els costats del quadrat definits per aquests vectors directors són paral·lels. El mateix es pot dir dels vectors $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_4$.
- 2) D'altra banda, els vectors $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_3$, són perpendiculars als vectors $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_4$, perquè el seu producte escalar és igual a zero:

$$v_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot v_4 = v_3 \cdot v_2 = v_3 \cdot v_4 = 0$$

- 3) Finalment, la longitud de tots els costats és la mateixa perquè

$$\|v_1\| = \|v_2\| = \|v_3\| = \|v_4\| = 3\sqrt{2}$$



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

c) [0,5 punts]

La longitud del costat del quadrat original és

$$d(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\| = \sqrt{(8 - 2)^2 + (2 - 2)^2} = 6$$

L'àrea d'aquest quadrat és $A_1 = 36 u^2$

La longitud del costat del quadrat dels punts mitjans és $3\sqrt{2}$; l'àrea d'aquest quadrat és $A_2 = 18 u^2$, la meitat de l'àrea del quadrat original.

Puntuació.- a) 0,5 punts. b) 1 punt per justificar els costats paral·lels, 1 punt per justificar els costats perpendiculars, 1 punt per la justificació de la longitud dels costats. c) 0,5 punts. Valoreu amb fins 1 punt una resposta basada únicament en la representació acurada del problema. Accepteu com a vàlides altres alternatives de resposta. No és necessari justificar tots els paral·lelismes i perpendicularitats; atès que els costats són paral·lels dos a dos, és suficient justificar una perpendicularitat.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

PROBLEMA 2.

Solució.

a) [0,5 punts]

Les dues bases del prisma són quadrats d'àrea x^2 centímetres quadrats; cada centímetre quadrat té un cost de 8 cèntims; per tant, el cost de les dues bases és

$$2 \cdot 8 \cdot x^2 = 16x^2 \text{ cèntims.}$$

Cadascuna de les quatre cares laterals del prisma té un àrea de $x \cdot y$ centímetres quadrats, cadascun dels quals té un cost de 2 cèntims. El cost de les quatre cares és de $4 \cdot 2 \cdot x \cdot y = 8xy$ cèntims.

La funció de cost total és $C = 16x^2 + 8xy$ cèntims.

b) [0,5 punts]

El volum del prisma es calcula com $V = x^2 \cdot y = 500$ centímetres cúbics.

c) [1 punt]

Del càlcul del volum es té $y = \frac{500}{x^2}$; substituint aquesta expressió en el càlcul del cost total, es té

$$C(x) = 16x^2 + 8xy = 16x^2 + 8x \frac{500}{x^2} = 16x^2 + \frac{4.000}{x}$$

d) [2 punts]

Per determinar el mínim de la funció $C(x)$ igualarem la seva derivada a zero, i comprovarem que la segona derivada és positiva en el valor obtingut.

$$C'(x) = 32x - \frac{4.000}{x^2} = 0$$

Resolent aquesta equació: $32x^3 = 4.000$, d'on es dedueix, $x = \sqrt[3]{\frac{4.000}{32}} = \sqrt[3]{125} = 5$.

$$C''(x) = 32 + \frac{8.000}{x^3}; C''(5) = 32 + \frac{8.000}{125} = 96 > 0$$

Per tant, la longitud de cada costat de la base del prisma ha de ser $x = 5$ centímetres.

L'altura del prisma ha de ser $y = \frac{500}{x^2} = \frac{500}{25} = 20$ centímetres.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2022. Criteris d'avaluació

El cost total del prisma és de $C = 16x^2 + 8xy = 16 \cdot 25 + 8 \cdot 5 \cdot 20 = 1200$ cèntims, és a dir, 12 €.

Puntuació.- a) 0,5 punts; considereu no vàlida una resposta que no tingui en compte la quantitat de bases i de cares del prisma en l'expressió de la funció de costos totals. b) 0,5 punts. c) 1 punt. d) 1 punt per la condició necessària, 0,5 punts per la condició suficient, 0,5 punts per la interpretació de la solució. Valoreu la resposta d'aquest últim apartat sense tenir en compte si la funció a minimitzar és correcta o no; és a dir, valoreu amb la màxima puntuació qualsevol procediment de minimització que utilitzi les condicions necessària i suficient de mínim.