**SÈRIE 2**

## Part 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents.
[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

1.- Determineu els valors del paràmetre $m$ que fan que el sistema $\left.\begin{array}{r}3x+(2m+2)y=m+1\\(m-1)x+2y=m\end{array}\right\}$ tingui una única solució. Comproveu que no hi ha cap valor de $m$ que faci que el sistema sigui compatible indeterminat.
[1,5 punts]

**Solució:** El determinant de la matriu associada al sistema és $\det(A)=det\begin{pmatrix}3 & 2m+2\\ m-1 & 2\end{pmatrix}=4-2m^2$; aquest determinant s'anul·la únicament pels valors $m=-2$ i $m=2$. Per tant, si el paràmetre $m$ no és cap d'aquests dos valors, el sistema és <u>compatible determinat</u> (el sistema té una única solució).

En el cas $m=-2$, el sistema resulta ser $\left.\begin{array}{r}3x-2y=-1\\-3x+2y=-2\end{array}\right\}$, que és clarament <u>incompatible</u>: els coeficients de la segona equació són iguals als coeficients de la primera equació, canviats de signe, però no passa el mateix amb el terme independent de les equacions.

En el cas $m=2$, el sistema resulta ser $\left.\begin{array}{r}3x+6y=3\\x+2y=2\end{array}\right\}$, que és clarament <u>incompatible</u>: els coeficients de la primera equació són iguals als coeficients de la segona equació, multiplicats per 3, però no passa el mateix amb el terme independent de les equacions.

Per tant, en cap cas el sistema és indeterminat.

**Puntuació:** 0,5 punts per l'estudi del sistema compatible determinat. 0,5 punts per cadascun dels sistemes incompatibles obtinguts. Valoreu amb la màxima puntuació altres estudis correctes del sistema, com per exemple, la determinació del rang de la matriu ampliada.

2.- Considereu la funció $f(x)=\sqrt{\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}-1}$

a) Justifiqueu que $\frac{1/2}{1-x}+\frac{1/2}{1+x}-1=\frac{x^2}{1-x^2}$
[1 punt]

b) Determineu el domini de $f(x)$.
[0,5 punts]

**Solució:**
a) Realitzant les operacions indicades es té que

$$\frac{1/2}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}-1=\frac{\frac{1}{2}\cdot(1+x)+\frac{1}{2}\cdot(1-x)-(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)}=\frac{x^2}{1-x^2}$$

b) El domini de la funció està donat pels valors que no anul·len els denominadors i verifiquen que $\frac{x^2}{1-x^2}\geq 0$. Atès que el numerador d'aquest quocient és positiu, el domini estarà donat pels valors que fan que el denominador sigui estrictament positiu, és a dir, quan $1-x^2=(1-x)(1+x)>0$. El domini resulta ser l'interval obert $\boxed{\mathcal{D}(f)=]-1,+1[}$.

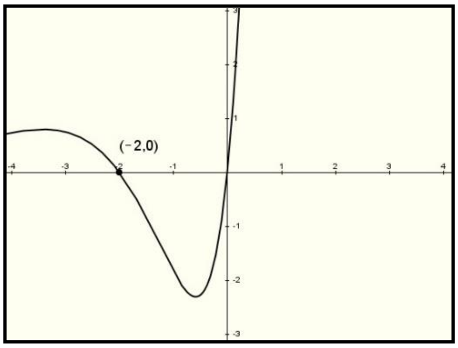
**Puntuació:** a) 1 punt per les operacions algebraiques correctes. b) 0,5 punts per l'argumentació del domini i la determinació correcta de l'interval. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions algebraiques.

3.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x)=4x^5+\frac{\sqrt{x}}{2}$
[1,5 punts]

**Solució:** Una primitiva és $\boxed{F(x)=\frac{4}{6}x^6+\frac{1}{3}x^{3/2}}$ perquè $F'(x)=f(x)$.

**Puntuació:** 0,5 punts per la determinació correcta del primer sumand i 1 punt per la determinació correcta del segon sumand.

4.- La imatge adjunta representa la gràfica de la <u>**derivada**</u> $f'(x)$ de la funció $f(x)$. Justifiqueu que <u>**la funció**</u> $f(x)$ té un màxim en el punt d'abscissa $x=-2$.
[1,5 punts]




**Solució:** La gràfica de la funció derivada $f'(x)$ és contínua, per tant la funció $f(x)$ és contínua i derivable.
A la gràfica de la derivada s'observa que $f'(-2)=0$. A l'esquerra de $x=-2$, la funció $f(x)$ és creixent perquè la derivada pren valors positius, $f'(x)>0$; a la dreta de
$x=-2$, la funció $f(x)$ és decreixent perquè la derivada pren valors negatius,
$f'(x)<0$. En $x=-2$ la funció $f(x)$ assoleix un màxim perquè canvia de creixent a decreixent.

**Puntuació:** 0,5 punts per la relació entre el signe de la derivada i el creixement i decreixement de la funció. 1 punt per la relació entre el màxim i el canvi de signe de la derivada.

5.- Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculeu el determinant de la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$.
[1 punt]

b) Calculeu el producte de matrius $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$.
[0,5 punts]

**Solució:**
a) Les matrius amb determinant no nul verifiquen la relació següent amb les seves matrius inverses:

$$\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})}$$

on $\boldsymbol{A}^{-1}$ és la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$.

Per tant, $\boxed{\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\boldsymbol{A})} = \frac{1}{4}}$.

Alternativament, es pot calcular la matriu inversa de la matriu $\boldsymbol{A}$ i després el seu determinant. En aquest cas, $\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$, i el seu determinant és $\det(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{4}$.

b) El producte de matrius és $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

També es pot utilitzar el resultat de l'apartat anterior, $2\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{B}$, per tal d'argumentar que $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot 2 \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = 2\boldsymbol{I}_d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

**Puntuació:** a) 1 punt cas d'utilitzar la relació entre els determinants de les matrius inverses. En un altre cas, valoreu amb 0,5 punts el càlcul de la matriu inversa i amb 0,5 punts el càlcul del seu determinant. b) 0,5 punts pel càlcul correcte del producte.

6.- Calculeu l'angle que formen els dos plans $\pi_1: 2x - 3y + z = 4$ i $\pi_2: 3x + 2y = 2$. Determineu un punt de la intersecció dels dos plans.
[1,5 punts]

**Solució:**
L'angle que formen els dos plans és el mateix angle que formen els seu vectors normals respectius, $n_1 = (2, -3, 1)$ i $n_2 = (3, 2, 0)$. Aquests dos vectors són perpendiculars perquè el seu producte escalar és zero:
$n_1 \cdot n_2 = 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 0$. Per tant, els plans formen un angle de $\frac{\pi}{2}$ o 90º.

La intersecció dels dos plans és una recta, amb equació $\left.\begin{matrix} 2x - 3y + z = 4 \\ 3x + 2y = 2 \end{matrix}\right\}$; qualsevol punt d'aquesta recta serà un punt de la intersecció dels plans.
Per exemple, si en el sistema anterior substituïm $x = 1$, es té que $y = \frac{-1}{2}$ i $z = \frac{1}{2}$. El punt $P(1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$ és un punt de la intersecció dels dos plans.

**Puntuació:** a) 0,5 punts l'argumentació dels angles dels vectors normals i 0,5 per la determinació de la perpendicularitat. 0,5 per qualsevol punt de la recta d'intersecció dels plans.

## Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.
[4 punts]

1.- Considereu el rectangle de vèrtexs $A(1,1)$, $B(6,6)$, $C(3,-1)$ i $D(x,y)$.
a) Justifiqueu que la recta $r_1$, que passa pels vèrtexs $A$ i $B$, y la recta $r_2$, que passa pels vèrtexs $A$ i $C$, són perpendiculars.
[1 punt]
b) Determineu l'equació de la recta $r_3$ paral·lela a $r_1$ que passa per $C$, i l'equació de la recta $r_4$, paral·lela a $r_2$, i que passa per $B$.
[1 punt]
c) Determineu les coordenades del quart vèrtex del rectangle, $D(x,y)$.
[2 punts]

**Solució:**

a) Les rectes següents determinen dos dels costats del rectangle:
Recta que passa pels vèrtexs $A(1,1)$ i $B(6,6)$: $r_1: y = x$
Recta que passa pels vèrtexs $A(1,1)$ i $C(3,-1)$: $r_2: y = -x + 2$
Aquestes dues rectes són perpendiculars (els seus pendents, 1 i -1, respectivament, són inversos i oposats).
La recta que passa pels vèrtexs $B(6,6)$ i $C(3,-1)$, $s: y = \frac{7}{3}x - 8$ no és perpendicular a cap de les altres dues, per tant, no pot contenir cap costat del rectangle.

b) Els altres dos costats del rectangle pertanyen a rectes paral·leles a les rectes anteriors i que passen per un altre vèrtex.
Recta paral·lela a $r_1$ (amb el mateix pendent) que passa per $C(3,-1)$: $r_3: y = x - 4$
Recta paral·lela a $r_2$ (amb el mateix pendent) que passa per $B(6,6)$: $r_4: y = -x + 12$

c) El quart vèrtex del rectangle, $D(x,y)$, és la intersecció entre les dues rectes determinades a l'apartat anterior:

$$\left.\begin{aligned} r_3: y &= x - 4 \\ r_4: y &= -x + 12 \end{aligned}\right\}$$

La solució d'aquest sistema és $\boxed{D(x,y) = (8,4)}$

**Puntuació.-** Apartat a): 0,5 punts per la determinació correcta de les dues rectes que determinen dos dels costats del rectangle. 0,5 punts per comprovar que les dues rectes són perpendiculars. Penalitzeu amb 0,5 punts si les rectes obtingudes no són perpendiculars. Apartat b): 0,5 punts per les relacions de paral·lelisme que s'utilitzen; 0,5 punts per la determinació correcta de les dues rectes que determinen els altres dos costats del rectangle. Apartat c): 1 punt pel plantejament del sistema que permet la determinació correcta del quart vèrtex i 1 punt per la resolució correcta del sistema. Valoreu amb la màxima puntuació qualsevol altra resolució alternativa correcta, per exemple, una representació gràfica acurada del quart vèrtex. També es considera correcta la determinació del quart vèrtex a partir de la relació $D = A + d$, on $d = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$ o equivalent, que relaciona el vector director de la diagonal del rectangle amb la suma dels vectors directors de les rectes que defineixen els costats. Penalitzeu amb fins 1 punt les possibles incoherències entre els resultats obtinguts als diferents apartats.

2.- Determineu les dimensions d'un rectangle de 169 m2 d'àrea que té el perímetre mínim. Comproveu que el rectangle obtingut és un quadrat.

**Solució.-** Anomenem $x$ i $y$ les longituds de cadascun dels costats del rectangle. L'àrea del rectangle és $A: x \cdot y = 169$, d'on $y = \frac{169}{x}$.
El perímetre del rectangle és la suma de la longitud dels quatre costats, és a dir,

$$P(x) = 2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{169}{x} = 2x + \frac{338}{x}$$

Segons la condició necessària de primer ordre, en un mínim s'anul·la la primera derivada:
$P'(x) = 2 - \frac{338}{x^2} = 0$; les solucions d'aquesta equació són $x = -13$ (ho descartem perquè la longitud ha de ser positiva) i $x = +13$. La longitud de l'altre costat és $y = \frac{169}{x} = \frac{169}{13} = 13$, és a dir, es tracta d'un quadrat.

Per comprovar que es tracta d'un mínim, la derivada segona en $x = +13$ ha de ser un valor positiu. En efecte, $P''(x) = \frac{673}{x^3}$; $P''(13) = \frac{673}{13^3} > 0$.

Per tant, el rectangle té costats de longituds $\boxed{x = y = +13}$, i es tracta d'un quadrat.

**Puntuació.-** 1 punt per la determinació de la funció perímetre. 1 punt per l'aplicació correcta de la condició necessària i 1 punt per la condició suficient de mínim. 1 punt per l'obtenció de la solució i la comprovació que es tracta d'un quadrat. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les derivades.