Sèrie 3

Part 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions proposades.

[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

1.- Considereu els punts $P(3,-2,5)$ i $Q(-1,4,-3)$ i el pla
$\pi: 2x-3y+4z-3=0$.

a) Justifiqueu que el punt mitjà $M(a,b,c)$ entre P i Q pertany al pla.
[1 punt]

b) Escriviu una equació de la recta que passa per P i Q.
[0,5 punts]

Solució:

a) El punt mitjà es determina com $\boxed{M=\frac{P+Q}{2}=\frac{(3,-2,5)+(-1,4,-3)}{2}=(1,1,1)}$. Aquest punt pertany al pla perquè verifica l'equació del pla
$\pi: 2x-3y+4z-3=2\cdot 1-3\cdot 1+4\cdot 1-3=0$

b) Un vector director de la recta és $\vec{d}=\overrightarrow{PQ}=Q-P=(-4,6,-8)$.
Una equació de la recta que passa per P i té aquest vector director és
$r:(x,y,z)=(3,-2,5)+\lambda(-4,6,-8)$.

Puntuació: a) 0,5 punts per la determinació correcta del punt mitjà. 0,5 punts per la comprovació de la pertinença del punt al pla. b) 0,5 punts per qualsevol expressió correcta de la recta.

2.- Justifiqueu que $F(x)=\frac{3}{2}\ln(2x-1)-4\ln(x+1)$ és una primitiva de
$$f(x)=\frac{7-5x}{2x^2+x-1}$$
[1,5 punts]

Solució:

S'ha de comprovar que $F'(x)=f(x)$. En efecte,
$$F'(x)=\frac{\frac{3}{2}}{2x-1}\cdot 2-\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2x-1}-\frac{4}{x+1}=\frac{3(x+1)-4(2x-1)}{(2x-1)(x+1)}=\frac{-5x+7}{2x^2+x-1}$$

Puntuació: a) 0,5 punts per la relació entre primitiva i derivada. 1 punt pel càlcul correcte de la derivada primera. Penalitzeu amb fins 0,5 punts el càlcul incorrecte de la derivada i amb 0,5 punts les errades greus en els càlculs algebraics.

3.- Determineu un mínim de la funció
$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$
[1,5 punts]

Solució: Segons la condició necessària de mínim, hem de determinar els valors que anul·len la derivada primera de la funció.
$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2+1)-(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0$; l'única solució és $x = 0$.
A més, la derivada és negativa en l'interval obert $]-\infty, 0[$ i positiva en l'interval obert $]0, +\infty[$, per tant, canvia de decreixent a creixent, la qual cosa demostra que la funció té un mínim en $x = 0$.
Alternativament, es pot comprovar que la derivada segona $f''(x) = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3}$ en $x = 0$ pren un valor positiu (condició suficient de mínim).

Puntuació: 1 punt per l'aplicació correcta de la condició necessària de mínim. 0,5 per la condició suficient, ja sigui de primer ordre o de segon ordre. Penalitzeu amb fins 0,5 punts el càlcul incorrecte de les derivades.

4.- Considereu un triangle rectangle en el qual l'angle $\hat{A}$ és de $\frac{\pi}{6}$ (30º) i el costat oposat a aquest angle mesura 6 metres. Determineu el perímetre i l'àrea del rectangle.
[1,5 punts]

Solució:
Atès que es tracta d'un triangle rectangle, es verifica $a = h \cdot \sin(\hat{A})$, en què $a = 6$ i h és la hipotenusa. Es dedueix que $h = \frac{a}{\sin(\hat{A})} = 12$

També es té que el tercer costat del triangle rectangle verifica $b = h \cdot \cos(\hat{A}) = 6\sqrt{3}$

Finalment, el perímetre del triangle és $P = 6 + 12 + 6\sqrt{3} = 18 + 6\sqrt{3}$ i l'àrea és
$A = \frac{1}{2} a \cdot b = 18\sqrt{3}$.

Puntuació: 0,5 pel càlcul de la hipotenusa; 0,5 punts pel càlcul del tercer costat. 0,5 punts pel càlcul del perímetre i de l'àrea.

5.- Resoleu l'equació
$$2x \cdot \sqrt{\frac{49}{7-2x}} - \sqrt{\frac{49}{7-2x}} = 7$$
[1,5 punts]

Solució:
Transformant l'equació es té

$$2x \cdot \sqrt{\frac{49}{7-2x}} - \sqrt{\frac{49}{7-2x}} = 7$$

$$(2x-1) \cdot \sqrt{\frac{49}{7-2x}} = 7$$

$$(2x-1)^2 \cdot \frac{49}{7-2x} = 49$$

$$(2x-1)^2 = 7-2x;\ 4x^2-4x+1 = 7-2x;\ 4x^2-2x-6=0$$

Les dues solucions d'aquesta equació són $x = \frac{3}{2}$ i $x = -1$. El segon valor no verifica l'equació inicial, per tant, l'única solució de l'equació original és $x = \frac{3}{2}$.

Puntuació: 1 punt per les operacions algebraiques que permeten la resolució. 0,5 punts per la determinació de la solució. No és necessari justificar la unicitat de la solució. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus de càlcul.

6.- Considereu la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Determineu els valors de p i q per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{A}^2 - p\boldsymbol{I} = q\boldsymbol{A}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,5 punts]

Solució:
Calculant el producte de matrius es té $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$.

Substituint en $\boldsymbol{A}^2 - p\boldsymbol{I} = q\boldsymbol{A}$ es té

$$\begin{pmatrix} 21 & 6 \\ 8 & 13 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21-p & 6 \\ 8 & 13-p \end{pmatrix} = q\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

S'han de determinar els valors de p i q que resolen el sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} 21-p &= 3q \\ 6 &= 3q \\ 8 &= 4q \\ 13-p &= -q \end{aligned}\right\}$$

Es té que de $p = 15$ i $q = 2$.

Puntuació: 0,5 punts pel producte de matrius; 0,5 punts pel plantejament correcte del sistema. 0,5 punts per la determinació dels paràmetres. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les possibles incoherències i les errades greus de càlcul.

Part 2
Resoleu UN dels dos problemes següents.
[4 punts en total]

1.- Considereu els punts $P(-4,1)$ i $Q(3,2)$.
a) Escriviu una equació de la recta r_1 que passa pels punts $P\ i\ Q$.
[0,5 punts]
b) Determineu el punt mitjà M entre els punts $P\ i\ Q$.
[0,5 punts]
c) Escriviu una equació de la recta r_2 perpendicular a r_1 que passa pel punt M.
[1 punt]
d) Justifiqueu que tots els punts de la recta r_2 anterior són equidistants de $P\ i\ Q$, és a dir, qualsevol punt $T(x,y)$ de la recta està a la mateixa distància del punt P que del punt Q, de manera que $d(P,T) = d(Q,T)$.
[2 punts]

Solució.-
a) L'equació vectorial de la recta que passa pels punts $P\ i\ Q$ és
$r_1:(x,y) = P + \lambda\overrightarrow{PQ} = (-4,1) + \lambda(7,1)$, sent
$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,2) - (-4,1) = (7,1)$ La recta també es pot expressar com $r_1: y = \frac{1}{7}x + \frac{11}{7}$

b) El punt mitjà és $M = \frac{1}{2}(P+Q) = (\frac{-1}{2}, \frac{3}{2})$.

c) Un vector director de la recta r_2 perpendicular a r_1 és $\vec{d} = (1,-7)$. L'equació vectorial de la recta r_2 és $r_2:(x,y) = M + \mu\vec{d} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{3}{2}\right) + \mu(1,-7)$. La recta també es pot expressar com $r_2: y = -7x - 2$

d) Els punts $T(x,y)$ de la recta r_2 són de la forma $T:(\mu - \frac{1}{2}, \frac{3}{2} - 7\mu)$.
Calculant les distàncies es té:

$$d(P,T) = \|T-P\| = \sqrt{\left(\mu + \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 7\mu\right)^2} = \sqrt{\mu^2 + 7\mu + \frac{49}{4} + \frac{1}{4} - 7\mu + 49\mu^2} == \sqrt{\frac{50}{4} + 50\mu^2}$$

$$d(Q,T) = \|T-Q\| = \sqrt{\left(\mu - \frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2} - 7\mu\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\mu^2 - 7\mu + \frac{49}{4} + \frac{1}{4} + 7\mu + 49\mu^2} = \sqrt{\frac{50}{4} + 50\mu^2}$$

És a dir,
$d(P,T) = d(Q,T)$

Puntuació.- a) 0,5 punts. b) 0,5 punts. c) 0,5 punts per la relació entre els pendents de les rectes perpendiculars; 0,5 per l'equació de la recta perpendicular. d) 1 punt per la caracterització dels punts de la recta perpendicular; 1 punt pel càlcul de les distàncies. Valoreu positivament totes les respostes que mostrin una argumentació vàlida i uns càlculs i resultats coherents.

2.- Un pagès barreja blat de moro, farina de peix i pinso per crear la dieta setmanal amb què alimentarà el seu aviram. Cada setmana, la dieta ha de contenir 3 unitats de ferro, 4 unitats de vitamines i 3 unitats de calci. Cada kilogram de blat de moro dona 2 uni- tats de ferro, 1 unitat de vitamines i 1 unitat de calci; cada kilogram de farina de peix proporciona 3 unitats de ferro i 3 unitats de vitamines; cada kilogram de pinso aporta 1 unitat de ferro, 2 unitats de vitamines i 2 unitats de calci.

a) Determineu la composició setmanal de la dieta.
[3 punts]

b) Justifiqueu que, en la situació descrita, no és possible dissenyar una dieta amb un contingut de 3 unitats de ferro, 4 unitats de vitamines i 4,5 unitats de calci.
[1 punt]

Solució.-
a) Resumirem la informació en una taula o matriu:

	Moresc	Farina de peix	Pinso	Necessitats
Ferro	2	3	1	3
Vitamines	1	3	2	4
Calci	1	0	2	3

Anomenem x, y, z els Kgs de moresc, farina de peix i pinso que composen, respectivament, la dieta setmanal. El sistema d'equacions resulta ser:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+z&=3\,(ferro)\\ x+3y+2z&=4\,(vitamines)\\ x+2z&=3\,(calci)\end{aligned}\right\}$$

Combinant la segona i tercera equacions es té $3+3y=4$, i es dedueix $y=\frac{1}{3}$ Kg de farina de peix.

La primera i tercera equacions s'expressen

$$\left.\begin{aligned} 2x+z&=2\\ x+2z&=3\end{aligned}\right\}$$

d'on es té que $x=\frac{1}{3}$ Kg de moresc i $z=\frac{4}{3}$ Kg de pinso. En total, la dieta setmanal és de 2 Kg.

b) En el cas que augmentessin les necessitats setmanals de calci, el sistema s'escriuria

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y+z&=3\,(ferro)\\ x+3y+2z&=4\,(vitamines)\\ x+2z&=4{,}5\,(calci)\end{aligned}\right\}$$

Combinant la segona i tercera equacions es té $4{,}5+3y=4$, i el valor de y seria negativo, la qual cosa no té sentit al tractar-se de Kg de farina de peix.

Puntuació.- a) 2 punts pel plantejament correcte del sistema; 1 punt per la seva resolució. Valoreu amb fins 1 punt la resolució correcta d'un sistema d'equacions, encara que el sistema no sigui correcte. Penalitzeu les solucions incoherents o inconsistents. b) 1 punt per qualsevol argumentació coherent.