Sèrie 1

Exercicis Opció A

A1.- Determineu el domini de la funció $f(x) = \ln(6 - x - x^2)$.

Solució: Només es pot calcular el logaritme de números estrictament positius, per tant, el domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors pels quals $6 - x - x^2 > 0$. Es tracta d'una paràbola orientada negativament, i, en conseqüència els valors estrictament positius es troben entre les dues arrels de l'equació $6 - x - x^2 = 0$, que són $x = -3$ i $x = +2$. El domini, doncs, resulta ser l'interval obert $\boxed{\mathcal{D}(f) =]-3, +2[}$.

Puntuació: 0,5 punts per l'argumentació del domini i 0,5 punts per la determinació correcta de l'interval.

A2.- Resoleu l'equació $x\sqrt{16 + (10 - x)^2} = (10 - x)\sqrt{4 + x^2}$.

Solució: Elevant l'equació al quadrat es té:

$$x^2(16 + (10 - x)^2) = (10 - x)^2(4 + x^2)$$

Aplicant la propietat distributiva:

$$16x^2 + x^2(10 - x)^2 = 4(10 - x)^2 + (10 - x)^2x^2$$

Simplificant i desenvolupant es té:

$$16x^2 = 4(10 - x)^2$$
$$16x^2 = 400 - 80x + 4x^2$$
$$12x^2 + 80x - 400 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $\boxed{x = -10}$ i $\boxed{x = \frac{10}{3}}$. El primer valor obtingut no verifica l'equació inicial, $x\sqrt{16 + (10 - x)^2} = (10 - x)\sqrt{4 + x^2}$,i per tant, no és una solució vàlida. El valor $\boxed{x = \frac{10}{3}}$ sí verifica l'equació i per tant és l'única solució vàlida.

Puntuació: 0,5 punts per les operacions algebraiques i 0,5 punts pel càlcul de les dues solucions de l'equació de segon grau. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions, com per exemple, l'aplicació errònia de $(a + b)^2$. Valoreu amb 0,5 punts la resolució correcta de l'equació obtinguda. No tingueu en compte la manca de comprovació d'una de les possibles solucions obtingudes.

A3.- Justifiqueu que els tres punts $P(-3,-3)$, $Q(2,3)$ i $R(7,9)$ estan alineats.

Solució: El punt $Q(2,3)$ és el punt mig entre $P(-3,-3)$ i $R(7,9)$, és a dir, $Q=\frac{P+R}{2}$, per tant, els tres punts estan alineats.
Alternativament, es pot determinar que la recta que passa per $P(-3,-3)$ i $Q(2,3)$ és $y=\frac{6x+3}{5}$, i que el punt $R(7,9)$ verifica aquesta equació.

Puntuació: 1 punt per qualsevol procediment que porti a una resposta raonada i amb càlculs correctes. Valoreu la coherència en la resposta a l'hora de penalitzar les errades de càlcul; per exemple, si l'equació de la recta és errònia, el tercer punt no la verificarà, i els punts no estaran alineats, malgrat l'enunciat afirma que sí ho estan.

A4.- Comproveu que el producte de les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ no és commutatiu, és a dir, $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$, però que, tanmateix, els determinants compleixen la igualtat següent: $\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})$.

Solució: Realitzem les operacions indicades, és a dir, els dos productes de matrius i els dos determinants. Es té que:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix};\det(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=0$$

$$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix};\det(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})=0$$

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul correcte de cada producte i determinant. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en els càlculs.

A5.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x)=\frac{5}{2x+1}-7x^3$.

Solució: Una primitiva és $F(x)=\frac{5}{2}\ln(2x+1)-\frac{7x^4}{4}$ perquè $F'(x)=f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació correcta de cada sumand.

Exercicis Opció B

B1.- Justifiqueu que el triangle de vèrtexs $A(1,3)$, $B(5,11)$ i $C(5,1)$ és un triangle rectangle.

Solució: Per tal de justificar que és un triangle rectangle, determinarem l'angle dels vectors directors de les rectes que determinen els costats. La recta que uneix el vèrtexs $B(5,11)$ i $C(5,1)$ és vertical, $x=5$, amb vector director $u=(0,1)$. Un vector director de la recta que passa pels punts $A(1,3)$ i $B(5,11)$ és $v_1=B-A=(4,8)$; un vector director de la recta que passa pels punts $A(1,3)$ i $C(5,1)$ és $v_2=C-A=(4,-2)$; aquests dos vectors directors són perpendiculars, atès que el seu producte escalar és zero $v_1\cdot v_2=0$. Per tant, els costats $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ són perpendiculars i el triangle és rectangle.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre els vectors directors. 0,5 punts per la determinació de la perpendicularitat dels costats. Valoreu amb la màxima puntuació altres raonaments correctes acompanyats dels càlculs pertinents, com per exemple, la determinació de les rectes que contenen els costats i la relació entre els seus pendents.

B2.- Resoleu l'equació

$$\frac{4}{x+1}-3=\frac{\frac{5}{3}}{x-3}$$

Solució: L'equació es pot expressar com

$$\frac{4-3x-3}{x+1}=\frac{1-3x}{x+1}=\frac{5}{3(x-3)}$$

És a dir,

$$(1-3x)(3x-9)=5x+5$$
$$-9x^2+30x-9=5x+5$$
$$9x^2-25x+14=0$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $\boxed{x=2}$ i $\boxed{x=\frac{7}{9}}$.

Puntuació: 0,5 punts per les operacions algebraiques i 0,5 punts pel càlcul de les dues solucions de l'equació de segon grau. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions. Valoreu amb 0,5 punts la resolució correcta de l'equació obtinguda.

B3.- Determineu algun punt $Q(x, y)$ de la recta horitzontal $y = 4$ amb distància al punt $P(1, 1)$ igual a $\sqrt{10}$.

Solució: Els punts $Q(x, y)$ de la recta horitzontal $y = 4$ són de la forma $(x, 4)$. Calculant la distància entre els punts $P(1, 1)$ i $Q(x, 4)$, es té que $d(P, Q) = \sqrt{(x-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 10} = \sqrt{10}$, és a dir, $x^2 - 2x = 0$. Aquesta equació té dues solucions, $x = 0$ i $x = 2$. Els punts $\boxed{Q_1(0, 4)}$ i $\boxed{Q_2(2, 4)}$ són punts de la recta $y = 4$ que disten $\sqrt{10}$ del punt $P(1, 1)$.

Puntuació: 0,5 punts per la caracterització dels punts de la recta horitzontal. 0,5 punts per la determinació de qualsevol dels dos punts.

B4.- Determineu el valor de p que fa que la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ verifiqui l'equació $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_2$, en què $\boldsymbol{I}_2$ és la matriu identitat d'ordre 2.

Solució: Realitzant les operacions matricials es té que

$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p & 0 \\ 0 & 2p \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'on es dedueix que $\boxed{p = \frac{1}{2}}$.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul correcte de les operacions matricials. 0,5 punts per la determinació correcta del valor de p. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en el càlcul matricial.

B5.- Comproveu que la recta tangent a la funció $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$ és horitzontal, és a dir, que té pendent zero.

Solució: El valor del pendent de la recta tangent en el punt és el valor de la derivada primera en aquest punt.

En efecte, es té que

$$f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + x^2 \cdot e^{2x} \cdot 2 = \left(2x^2 + 2x\right) \cdot e^{2x}; f'(0) = 0$$

Per tant, la recta tangent en el punt d'abscissa $x = 0$ té pendent nul i és horitzontal.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre el pendent i la derivada. 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada. Penalitzeu amb fins 0,5 punts el càlcul incorrecte de la derivada del producte o l'aplicació incorrecta de la regla de la cadena.

Problema 1.-

1.- Una pastisseria prepara tres tipus de capses amb bombons de xocolata blanca i bombons de xocolata negra. La capsa del primer tipus, la Capsa Vermella, conté 15 bombons de xocolata blanca i 20 de xocolata negra, i costa 16 €. El segon tipus de capsa es la Capsa Negra, que conté un 20% més de bombons de xocolata blanca i un 10% menys de bombons de xocolata negra que la Capsa Vermella, i té un cost total de 16,20 €.
Determineu:

a) El cost d'un bombó de xocolata blanca i el cost d'un bombó de xocolata negra.
b) El cost del tercer tipus de capsa, la Capsa Deluxe, que conté 20 bombons de cada tipus.

Solució.-

a) Anomenem x i y al cost unitari de cada bombó de xocolata blanca i xocolata negra, respectivament. D'aquesta manera, el cost de la Capsa Vermella i el cost de la Capsa Negra determinen les equacions del sistema següent:

$$\left.\begin{aligned} 15x + 20y &= 16 \\ 15 \cdot 1{,}2x + 20 \cdot 0{,}9y &= 16{,}20 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 15x + 20y &= 16 \\ 18x + 18y &= 16{,}2 \end{aligned}\right\}$$

Dividint la primera equació per 5 i la segona per 6 es té

$$\left.\begin{aligned} 3x + 4y &= 3{,}2 \\ 3x + 3y &= 2{,}7 \end{aligned}\right\}$$

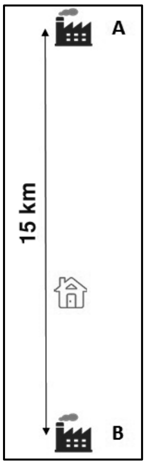
Restant les dues equacions, es té $\boxed{y = 0{,}5€}$ el cost de cada bombó de xocolata negra; substituint en qualsevol de les equacions anteriors s'obté $\boxed{x = 0{,}4€}$ el cost de cada bombó de xocolata blanca.

b) La Capsa Deluxe conté 20 bombons de cada tipus, i el seu cost serà de $20 \cdot 0{,}4 + 20 \cdot 0{,}5 = 18€$

Puntuació.- Apartat **a)** 2 punts pel plantejament d'un sistema d'equacions correcte. 2 punts per la determinació i interpretació correcta de la solució del sistema d'equacions. **b)** 1 punt. Penalitzeu amb fins 1 punt una equació incorrecta pel contingut de bombons de la Capsa Negra. Penalitzeu amb fins 1 punt l'obtenció d'una solució incoherent del sistema (valors negatius o amb preus unitaris superiors al preu total d'alguna de les capses).

Problema 2.-

Dues indústries, A i B, es troben als extrems d'una carretera recta, a 15 km l'una de l'altra. La indústria A emet una concentració de partícules contaminants de 300 parts per milió (ppm) i la indústria B emet una concentració de partícules contaminants de 75 ppm.



Les partícules contaminants de totes dues indústries arriben a qualsevol punt de la carretera que les uneix. La concentració de partícules contaminants que arriben a un punt de la carretera procedents de cada indústria és $\frac{c}{d}$, en què c és la concentració de partícules contaminants que emet la indústria (300 o 75 ppm) i d és la distància que hi ha fins a la indústria.

Es vol construir una casa en un punt intermedi de la carretera que uneix les dues indústries. Determineu a quina distància de cadascuna de les indústries s'ha d'ubicar la casa per a minimitzar la contaminació que prové de totes dues indústries. Quina és la concentració total de partícules contaminants que hi arribarà?

Solució.-

Anomenem x la distància (mesurada en km) entre la indústria A i el punt de la carretera on es construirà la casa. Aleshores, la distància de la casa a la indústria B és $15 - x$ (mesurada en km).

Atès que les partícules contaminants arriben a la casa procedents de totes dues indústries en una concentració que és recíproca a la distància ($\frac{c}{d}$), es té que la funció que mesura la concentració total de partícules contaminants que arribaran a la casa és

$$f(x) = \frac{300}{x} + \frac{75}{15 - x}$$

Per tal de determinar el mínim d'aquesta funció, igualarem la derivada primera a zero i comprovarem que, en el valor obtingut, la derivada segona pren un valor positiu.

En efecte: $f'(x) = \frac{-300}{x^2} + \frac{-75\cdot(-1)}{(15-x)^2} = \frac{-300}{x^2} + \frac{75}{(15-x)^2} = 0$; resolent, es té

$$\frac{300}{x^2} = \frac{75}{(15 - x)^2}$$

$$300 \cdot (15 - x)^2 = 75x^2$$
$$300x^2 - 9000x + 67500 = 75x^2$$
$$225x^2 - 9000x + 67500 = 0$$

$$x^2 - 40x + 300 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $x = 10$ i $x = 30$. Descartem aquesta segona solució perquè la casa ha d'estar entre les dues indústries, i per tant la distància ha de ser inferior a 15.

Finalment, calculant la derivada segona es té

$$f''(x) = \frac{600}{x^3} + \frac{150}{(15-x)^3}$$

Substituint:

$$f''(10) = \frac{600}{10^3} + \frac{150}{(15-10)^3} > 0$$

La casa s'ha de construir a $x = 10$ quilòmetres de la indústria A i a $15 - x = 5$ quilòmetres de la indústria B. La concentració total de partícules contaminants que arribarà a la casa és $f(10) = \frac{300}{10} + \frac{75}{15-10} = 30 + 15 = 45$ parts per milió.

Puntuació.- 2 punts per la determinació de la funció que mesura la concentració de partícules. 1 punt per l'aplicació correcta de la condició necessària i 1 punt per la condició suficient de mínim. 1 punt per l'obtenció de la solució i la seva interpretació. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les derivades. No és necessari descartar una de les dues solucions obtingudes.