Sèrie 3

Exercicis Opció A

A1.- Determineu una equació del pla que passa pels tres punts *P*(1, 1, 1), *Q*(2, 0, 2) i *R*(1, 0, 1).

Solució: Determinem dos vectors directors del pla: $v_1 = Q - P = (1,-1,1)$, $v_2 = R - P = (0,-1,0)$. Una equació del pla resulta ser

$$det\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -z+1+x-1 = x-z = 0.$$

Puntuació: 1 punt per la determinació correcta d'una equació del pla; considereu correctes altres maneres de determinar una equació del pla, i també altres equacions equivalents del pla.

A2.- Resoleu l'equació $\frac{4}{2x-1} = \frac{3}{3x+2} + \frac{5}{3}$ i doneu-ne totes les solucions.

Solució: Operem i simplifiquem i les fraccions de l'equació:

$$\frac{4}{2x-1} = \frac{3}{3x+2} + \frac{5}{3} = \frac{9+5(3x+2)}{3(3x+2)} = \frac{15x+19}{9x+6}$$

$$4(9x+6) = (2x-1)(15x+19)$$

$$36x+24 = 30x^2+23x-19$$

$$30x^2-13x-43 = 0$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $x = \frac{43}{30}$ i $x = -1$.

Puntuació: 0,5 punts per les operacions entre fraccions i 0,5 punts pel càlcul de les dues solucions. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions de fraccions. Valoreu amb 0,5 punts la resolució correcta de l'equació obtinguda.

A3.- Determineu per a quin valor de B el pla π: $2x + By + z = 14$ és paral·lel a la recta
$r: (x, y, z) = (2,1,1) + \lambda(3,1,\frac{3}{2})$.

Solució: El pla i la recta seran paral·lels quan el vector normal del pla $n = (2, B, 1)$ sigui perpendicular al vector director de la recta $v = (3,1,\frac{3}{2})$, és a dir, quan $v \cdot n = 0$. D'aquesta igualtat es té $\left(3,1,\frac{3}{2}\right) \cdot (2, B, 1) = 6 + B + \frac{3}{2} = 0$, d'on $B = \frac{-15}{2}$. A més, la recta no està inclosa en el pla, atès que el punt de la recta $P(2,1,1)$ no verifica l'equació del pla $\pi: 2x - \frac{15}{2}y + z = 14$.

Puntuació: 0,5 punts per la condició de paral·lelisme; 0,5 punts per la determinació del valor correcte de B. No és necessari comprovar que la recta no està inclosa en el pla.

A4.- Comproveu que les rectes tangents a les funcions $f(x) = 3x^2 - 4x + 4$ i $g(x) = 3\ln(2x + 1)$ en el punt d'abscissa $x = 1$ no es tallen en cap punt.

Solució: Les rectes no es tallen en cap punt quan són paral·leles i no coincidents, és a dir, quan tenen el mateix pendent i en $x = 1$ no coincideixen. Recordem que el pendent de la recta tangent a una funció en x_0 és el valor de la derivada de la funció en x_0.

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 4; f'(x) = 6x - 4; f'(1) = 2$$
$$g(x) = 3\ln(2x + 1); g'(x) = \frac{6}{2x+1}; g'(1) = \frac{6}{3} = 2$$

Les rectes tenen el mateix pendent, i per tant són paral·leles. No són coincidents atès que $f(1) = 3 \neq g(1) = 3\ln(3)$.

Puntuació: 0,25 punts per la condició de paral·lelisme; 0,5 punts pel càlcul correcte del pendent de les rectes tangents. 0,25 punts per comprovar que no són coincidents.

A5.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x) = \frac{5}{2x} - 7x + 3$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = \frac{5}{2}\ln(x) - \frac{7x^2}{2} + 3x$, perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació correcta del primer sumand; 0,5 punts per la determinació correcta dels altres dos. Considereu correcta també una primitiva com $F(x) = \frac{5}{2}\ln(2x) - \frac{7x^2}{2} + 3x$.

Exercicis Opció B

B1.- Considereu les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$. Comproveu que $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = (\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2$.

Solució: Realitzem les operacions indicades:

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9/2 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 9/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15/2 \\ -15/2 & 85/4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 7/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -15/2 \\ -15/2 & 85/4 \end{pmatrix}$$

Puntuació: 0,5 punts per la suma i la resta de les matrius. 0,5 punts pel càlcul correcte dels quadrats. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en el càlcul del producte de matrius.

B2.- Considereu les rectes $r\colon (x,y,z) = (1{,}5{,}1) + \lambda(1{,}0{,}1)$ i $s\colon \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{2}$. Determineu per a quin valor de *m* el punt *P*(2, 5, *m*) pertany a totes dues rectes.

Solució: El punt $P(2{,}5,m)$ ha de verificar les equacions de les dues rectes:
$r\colon (2{,}5,m) = (1{,}5{,}1) + \lambda(1{,}0{,}1)$, d'on $\lambda = 1$ i $m = 2$.
$s\colon \frac{2+1}{3} = \frac{5-1}{4} = \frac{m}{2}$, d'on $m = 2$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascuna de les comprovacions de la pertinença del punt a cada recta.

B3.- Considereu la progressió geomètrica
$\left\{a_n = \frac{2}{3^n}\right\} = \left\{a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{2}{3^2}, a_3 = \frac{2}{3^3}, \ldots\right\}$. Escriviu i simplifiqueu el terme general de la progressió geomètrica
$\{b_n = a_n - a_{n+1}\} = \{b_1 = a_1 - a_2, b_2 = a_2 - a_3, b_3 = a_3 - a_4, \ldots\}$.

Solució: El terme general de la nova successió és
$$b_n = a_n - a_{n+1} = \frac{2}{3^n} - \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2\cdot 3 - 2}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^{n+1}}$$

Puntuació: 0,5 punts per l'expressió del terme general; 0,5 punts per la seva simplificació. Penalitzeu amb 0,5 punts les errades greus en les operacions de simplificació.

B4.- Determineu el domini de la funció

$$f(x) = \sqrt{\frac{9-x^2}{8+x^2}}$$

Solució: El domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors pels quals $\frac{9-x^2}{8+x^2} \geq 0$. Atès que el denominador és sempre estrictament positiu, els valors del domini són aquells que verifiquen $9 - x^2 \geq 0$. Es tracta d'una paràbola orientada negativament; els valors positius es troben entre les dues arrels de l'equació $9 - x^2 = 0$, que són $x = -3$ i $x = +3$. El domini resulta ser l'interval tancat $\mathcal{D}(f) = [-3, +3]$.

Puntuació: 0,5 punts per l'argumentació del domini i 0,5 punts per la determinació correcta de l'interval.

B5.- Justifiqueu que la funció $f(x) = 2x \cdot e^{-x}$ té un màxim en el punt d'abscissa $x = 1$.

Solució: Segons la condició necessària d'òptim de 1r ordre, la primera derivada s'anul·la en els màxims i mínims, és a dir, s'ha de verificar que $f'(1) = 0$.

En efecte, es té $f'(x) = 2 \cdot e^{-x} + 2x \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (2 - 2x) \cdot e^{-x}$; $f'(1) = 0$.

A més de la condició necessària, per tal de justificar que es tracta d'un màxim, la segona derivada en $x = 1$ ha de ser negativa (condició suficient de segon ordre).

Calculant la segona derivada i substituint, es té $f''(x) = (-2) \cdot e^{-x} + (2 - 2x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = (2x - 4) \cdot e^{-x}$; $f''(1) = -2 \cdot e^{-1} < 0$.

Puntuació: 0,5 punts per la condició necessària d'òptim de 1r ordre. 0,5 punts per la condició suficient d'òptim. Valoreu correctament les respostes que utilitzin la condició suficient de primer ordre (creixement i decreixement de la funció en un entorn de $x = 1$).

Problema 1.-

Determineu l'equació de la paràbola $y = c + bx + ax^2$ que passa pels punts $P(\frac{3}{2}, \frac{-9}{2})$, $Q(6, 36)$ i $R(-1, 8)$.

Solució.-

Substituïm els tres punts en l'equació de la paràbola $y = c + bx + ax^2$:

P: $c + \frac{3}{2}b + \frac{9}{4}a = \frac{-9}{2}$

Q: $c + 6b + 36a = 36$

R: $c - b + a = 8$

Es tracta d'un sistema de tres equacions amb tres incògnites. Si restem la tercera equació de la segona i la tercera equació de la primera, tenim les dues equacions següents:

$7b + 35a = 28$

$\frac{5}{2}b + \frac{5}{4}a = \frac{-25}{2} \longrightarrow 2b + a = -10 \longrightarrow a = -10 - 2b$

Substituint aquesta darrera igualtat en la equació anterior es té

$7b + 35a = 7b + 35(-10 - 2b) = 7b - 350 - 70b = -63b - 350 = 28 \longrightarrow$

$$\longrightarrow b = \frac{350 + 28}{-63} = -6$$

$a = -10 - 2b = -10 + 12 = 2$

$c - b + a = 8 \longrightarrow c = 8 + b - a = 8 - 6 - 2 = 0$

La paràbola és $y = 2x^2 - 6x$:

Puntuació.- 1,5 punts pel plantejament correcte del sistema d'equacions. 2 punts per proposar un mètode de resolució i obtenir-ne tres valors. 0,5 punts per cada coeficient de la paràbola (a, b, c) determinat correctament.

Problema 2.-

Una cadena de televisió planifica la programació per al mes que ve. En aquesta cadena, cada pel·lícula és vista per 2 milions d'espectadors i cada partit de futbol és seguit per 3 milions d'espectadors. Les despeses d'emissió, en milions d'euros, de les pel·lícules (x) i els partits de futbol (y) venen donades per l'expressió $x^2 + \frac{3y^2}{2}$. Determineu la quantitat de pel·lícules i de partits de futbol que ha de programar la cadena per a tenir un total de 10 milions d'espectadors i minimitzar les despeses d'emissió del mes que ve.

Solució.-

Anomenem x la quantitat de pel·lícules, y la quantitat de partits de futbol que s'han d'emetre.

La quantitat d'espectadors, en milions, ha de ser $2x + 3y = 10$, és a dir,

$$y = \frac{10 - 2x}{3}$$

La funció de despeses és

$$x^2 + \frac{3y^2}{2} = x^2 + \frac{3\left(\frac{10-2x}{3}\right)^2}{2} = x^2 + \frac{100 - 40x + 4x^2}{6} = \frac{10}{6}x^2 - \frac{40}{6}x + \frac{100}{6}$$

La funció de despeses $f(x) = \frac{10}{6}x^2 - \frac{40}{6}x + \frac{100}{6}$ és una paràbola orientada positivament, per tant, el mínim es troba en el seu vèrtex, és a dir, en el punt en el qual $f'(x) = 0$.

Derivant i igualant a zero es té $f'(x) = \frac{20}{6}x - \frac{40}{6} = 0 \longrightarrow x = 2$

Per tant, s'han de programar $x = 2$ pel·lícules, $y = \frac{10-2x}{3} = 2$ partits de futbol, i les despeses mínimes seran de $x^2 + \frac{3y^2}{2} = 4 + 6 = 10$ milions d'euros.

Puntuació.- 1 punt per l'equació del nombre d'espectadors. 1 punt per la funció de costos en una variable. 1 punt per la determinació del punt crític. 1 punt per la condició suficient de mínim. 1 punt per l'altre valor de la solució. Valoreu la resposta dels dos darrers apartats independentment de si la determinació del punt crític és correcta o no.