Sèrie 3

PROBLEMA 1.-

a) (1 punt).

IMC	*Nombre de treballadors*
0-18	10
18-25	40
25-30	13
30-40	6
40-50	1

b) (1 punt).

El percentatge de treballadors obesos és ((13+6+1)/70)·100 = 28,57%

c) (1,5 punts). *Mitjana aritmètica dels homes i dones: 0,75 punts cadascuna.*

Mitjana aritmètica Homes: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} c_i n_i}{n} = \dfrac{1150}{50} = 23$

Mitjana aritmètica Dones: $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} c_i n_i}{n} = \dfrac{412{,}5}{20} = 20{,}625$

d) (4,5 punts). *Variància dels homes i dones: 1 punt cadascuna; desviació típica: 0,25 cadascuna; coeficient de variació: 0,25 cadascun; interpretació: 1,5 punts.*

Variància del homes:

$$S_X^2 = \frac{\sum_i c_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{28760}{50} - (23)^2 = 575{,}2 - 529 = 46{,}2$$

Desviació típica dels homes: $S_x = \sqrt{46{,}2} = 6{,}7971$

Coeficient de variació de Pearson dels homes:
V_x= 100 · 6,7971/23 = 29,55%

Variància de les dones:

$$S_X^2 = \frac{\sum_i c_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{9746{,}25}{20} - (20{,}625)^2 = 487{,}3125 - 425{,}3906 = 61{,}9219$$

Desviació típica de les dones: $S_x = \sqrt{61{,}9219} = 7{,}869$

Coeficient de variació de Pearson de les dones:
V_x= 100 · 7,869/20,625 = 38,15%

La mitjana dels homes és més representativa ja que té el coeficient de variació de Pearson més petit.

e) (2 punts). *Interpretació de l'enunciat: 0,5 punts; identificació de l'interval que conté el primer quartil: 0,5 punts; càlcul del tercer quartil: 1 punt.*

S'ha de calcular el primer quartil ja que per sobre d'aquest valor hi ha un 75% dels treballadors amb més pes.

Identificació de l'interval:

Calculem la taula de freqüències absolutes acumulades:

IMC	N_i
0-18	10
18-25	50
25-30	63
30-40	69
40-50	70

El primer quartil és a l'interval 18-25 ja que té la primera freqüència absoluta acumulada que supera el valor n/4=17,5.

Una aproximació del primer quartil s'obté amb la següent fórmula (L_{i-1} és el límit inferior de l'interval que conté el quartil, n_i és la seva freqüència absoluta, N_{i-1} és la freqüència absoluta acumulada de l'interval anterior, a_i és l'amplitud),

$$Q_1 = L_{i-1} + \frac{\frac{n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i = 18 + \frac{17{,}5 - 10}{40} \cdot 7 = 19{,}3125\,.$$

PROBLEMA 2.-

a) (2 punts). *Mitjana aritmètica: 0,75 punts; variància: 1 punt; desviació estàndard: 0,25 punts.*

Mitjana aritmètica del nombre de receptes:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i n_i}{n} = \frac{2450}{100} = 24{,}5$$

Variància:

$$S_X^2 = \frac{\sum_i c_i^2 n_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{73500}{100} - (24{,}5)^2 = 735 - 600{,}25 = 134{,}75$$

Desviació estàndard del nombre de receptes: $S_x = \sqrt{134{,}75} = 11{,}6082$

b) (3 punts). *Interpretació de l'enunciat: 1 punt; interval modal: 1 punt ; càlcul de la moda: 1 punt.*

El nombre de receptes més freqüent és la moda, ja que és el valor que més vegades es repeteix.

L'interval modal és el que té la major freqüència, és a dir, interval 10-20

Una aproximació de la moda s'obté amb la següent fórmula (n_{i-1} i n_{i+1} són la densitat de freqüència dels intervals anterior i posterior a l'interval modal, respectivament),

$$Mo = L_{i-1} + \frac{n_{i+1}}{n_{i-1} + n_{i+1}} a_i = 10 + \frac{10}{5+10} 10 = 16.6667$$

c) (3 punts). *Interpretació de l'enunciat: 1 punt; identificació de l'interval que conté el tercer quartil: 1 punt; càlcul del tercer quartil: 1 punt.*

S'ha de calcular el tercer quartil ja que per sobre d'aquest valor hi ha un 25% dels usuaris que fan més receptes.

Per identificar l'interval del tercer quartil calculem la freqüència absoluta acumulada

Número de receptes	N_i
0-10	5
10-20	50
20-30	60
30-40	90
40-50	100

El tercer quartil és a l'interval 30-40 ja que té la primera freqüència absoluta acumulada que supera el valor 3n/4=75.

Una aproximació del tercer quartil s'obté amb la següent fórmula (L_{i-1} és el límit inferior de l'interval que conté el quartil, n_i és la seva freqüència absoluta, N_{i-1} és la freqüència absoluta acumulada de l'interval anterior, a_i és l'amplitud),

$$Q_3 = L_{i-1} + \frac{\frac{3n}{4} - N_{i-1}}{n_i} \cdot a_i = 30 + \frac{75-60}{30} \cdot 10 = 35 .$$

d) (1 punt).

El percentatge d'usuaris que tenen més de 30 receptes és (40/100)·100=40%.

e) (1 punt).

En total es recaptarà aproximadament $\sum_i c_i n_i = 2450$ euros

PROBLEMA 3.-

a) (7 punts). *Mitjana aritmètica de les dues variables: 1,5 punts; variàncies: 2 punts; desviacions estàndards: 0,5 punts; covariància: 1,25 punts coeficients de correlació: 0,75 punts; interpretació: 1 punt.*

Les mitjanes de la despesa i satisfacció:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{153}{10} = 15,3 \qquad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \frac{72}{10} = 7,2 .$$

La variàncies:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{2679}{10} - (15,3)^2 = 267,9 - 234,09 = 33,81$$

i

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{n} - \bar{y}^2 = \frac{580}{10} - (7,2)^2 = 58 - 51,84 = 6,16 .$$

Les desviacions estàndard: $S_x = \sqrt{33,81} = 5,8146$ i $S_y = \sqrt{6,16} = 2,4819$.

La covariància entre les dues variables:

$$S_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n} - \overline{xy} = \frac{1208}{10} - 15,3 \cdot 7,2 = 120,8 - 110,16 = 10,64 .$$

El coeficient de correlació: $r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x S_y} = \frac{10,64}{5,8146 \cdot 2,4819} = 0,7373$.

Interpretació: entre les dues variables hi ha una relació lineal positiva o directa que és bastant intensa. El nivell de satisfacció està bastant relacionada amb la despesa, a més despesa hi ha més nivell de satisfacció en el servei.

b) (3 punts). *Càlcul del pendent de la recta: 1,25 punts; càlcul del terme independent de la recta: 1,25 punts; especificació de la recta: 0,5 punts*

Pendent de la recta: $b = \frac{S_{xy}}{S_x^2} = \frac{10,64}{33,81} = 0,3147$

Terme independent de la recta:

$$a = \bar{y} - b\bar{x} = 7,2 - 0,3147 \cdot 15,3 = 7,2 - 4,8149 = 2,3851$$

La recta de regressió:

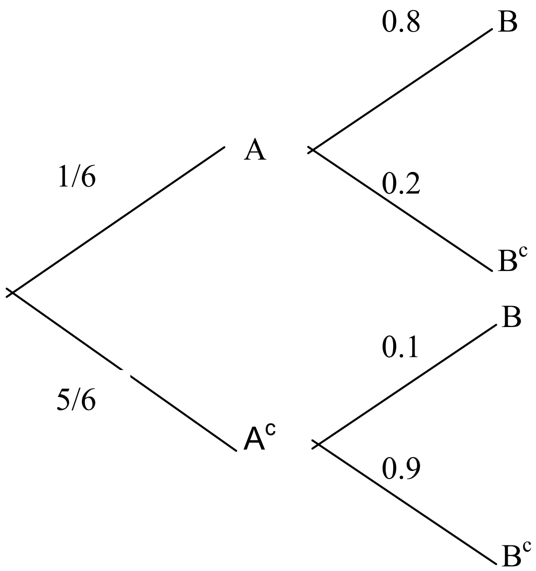
$$\hat{y}_i = 2,3851 + 0,3147\, x_i$$

PROBLEMA 4.-

a) (3 punts) *Diagrama d'arbre: 1,5 punts; probabilitats: 1,5 punts.*

A="plourà el dia del casament", B="Home del temps prediu pluja";
A^C="no plourà el dia del casament", B^C="Home del temps prediu no pluja";

P(A)=5/30, P(A^C)=25/30
P(B|A)=0,8, P(B^c|A^c)=0,9



b) (1 punt). *Si el plantejament i desenvolupament és correcte: 0,75 punts; si el càlcul és correcte: 0,25 punts*

$P(A\cap B) = P(B|A)\ P(A) = 0.8 * 1/6 = 0.1333$

c) (2 punts). *Si el plantejament i desenvolupament és correcte: 1,5 punts; si el càlcul és correcte: 0,5 punts*.

$P(A\cap B) + P(A^c\cap B^c) = 0.1333 + 0.75 = 0.8833$
on:

$P(A\cap B) = P(B|A)\ P(A) = 0.8 * 1/6 = 0.1333$
$P(A^c\cap B^c) = P(B^c \mid A^c)\ P(A^c) = 0.9 * 5/6 = 0.75$

d) (2 punts). *Si el plantejament i desenvolupament és correcte: 1,5 punts; si el càlcul és correcte: 0,5 punts*.

$P(A^c \mid B^c) = P(A^c\cap B^c) / P(B^c) = 0.75/0.7833 = 0.9575$
on:

$P(A^c\cap B^c) = P(B^c \mid A^c)\ P(A^c) = 0.9 * 5/6 = 0.75$
$P(B^c) = P(B^c \mid A)\ P(A) + P(B^c \mid A^c)\ P(A^c) = 0.2 * 1/6 + 0.9 * 5/6 = 0.7833$

e) (2 punts). *Si el plantejament i desenvolupament és correcte: 1,5 punts; si el càlcul és correcte: 0,5 punts*.

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B) = 0.1333/0.2167 = 0.6151$
on:

$P(A \cap B) = P(B|A)\, P(A) = 0.8 * 1/6 = 0.1333$
$P(B) = P(B \mid A)\, P(A) + P(B \mid A^c)\, P(A^c) = 0.8 * 1/6 + 0.1 * 5/6 = 0.2167$

PROBLEMA 5.-

X="Coeficient IQ d'un individu"
X té una distribució normal: $X \sim N(100, 10^2)$

Suposant $Z \sim N(0,1)$

a) (1,5 punts). *Si el procediment correcte: 1 punt; si la cerca del valor a les taules i el càlcul és correcte: 0,5 punts.*

$P(X>120)=P(Z>(120-100)/10)= P(Z>2)=$
$=1- P(Z<2)=1-0,9772=0,0228$
El percentatge de la població que té un coeficient superior a 120 és un 2,28%

b) (1,5 punts). *Si el procediment correcte: 1 punt; si la cerca del valor a les taules i el càlcul és correcte: 0,5 punts.*

$P(X<90)=P(Z<(90-100)/10)= P(Z<-1)= P(Z>1)$
$=1- P(Z<1)=1-0,8413=0,1587$
El percentatge de la població que té un coeficient inferior a 90 és un 15,87 %

c) (2 punts). *Si el procediment correcte: 1,5 punt; si la cerca del valor a les taules i el càlcul és correcte: 0,5 punts.*

$P(90<X<115)=P(X<115)-P(X<90)= 0,9332 - 0,1587 = 0,7745$

i. $P(X<115)=P(Z<(115-100)/10)= P(Z<1,5)= 0,9332$
ii. $P(X<90) =0,1587$

El percentatge de la població que té un coeficient entre a 90 i 115 és un 77,45 %

d) (2,5 punts). *Si el procediment correcte: 2 punts; si la cerca del valor a les taules i el càlcul és correcte: 0,5 punts.*

Cal trobar el valor de x de manera que
$P(X>x)=P(Z>(x-100)/10)=0.1$

Dit altrament
$P(Z<(x-100)/10) = 1 -0.1 = 0.9$

Així, si fem servir les taules $(x-100)/10 = 1,28$; aïllant la solució és igual a $x=1.28 * 10 + 100 = 112,8$

e) (2,5 punts). *Si el procediment correcte: 2 punts; si la cerca del valor a les taules i el càlcul és correcte: 0,5 punts.*

Cal trobar el valor de x de manera que
$P(X<x)=P(Z<(x-100)/10)=0.25$

Ara bé,
$P(Z<(x-100)/10) = P(Z>-(x-100)/10)= 1- P(Z<-(x-100)/10)$

Per tant, el valor de x ha de complir
$P(Z<-(x-100)/10) = 1 - 0.25 = 0.75$

Així, si fem servir les taules $-(x-100)/10 = 0,67$; aïllant la solució és igual a $x=-0.67 * 10 + 100 = 93,3$