Sèrie 2

Exercicis Opció A

A1.- Justifiqueu que, per a tots els valors de m, el sistema $\left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ x+2y=-4 \\ x+y=m^2+1 \end{array}\right\}$ és incompatible.

Solució: Les dues primeres equacions formen un sistema compatible determinat, amb una única solució $x=2$, $y=-3$. Substituint aquesta solució en la tercera equació es té $x+y=2-3=-1=m^2+1$, que no té cap solució real. Per tant, el sistema és incompatible.

Puntuació: 1 punt. Valoreu amb la màxima puntuació altres argumentacions vàlides; per exemple, sumant les dues primeres equacions es té $3x+3y=-3$, és a dir $x+y=-1$, que és incompatible amb la tercera equació. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus de càlcul o les errades que portin a conclusions incongruents amb l'enunciat, com per exemple, que el sistema és compatible per algun valor de m.

A2.- Escriviu una equació d'una recta que passa pel punt $P(\,2,0,1)$ y està continguda en el pla $\pi\colon 2x+3y-4z=0$.

Solució: Per tal de determinar una recta continguda en el pla, necessitem un punt del pla i un vector director de la recta, que s'ha d'obtenir a partir de dos punts del pla. Els punts $P(2,0,1)$ i $Q(1,2,2)$ pertanyen al pla (verifiquen l'equació); el vector director de la recta és $v=Q-P=(-1,2,1)$. L'equació de la recta que passa per P i té vector director v és $(x,y,z)=(2,0,1)+\alpha(-1,2,1)$.

Puntuació: 1 punt. Valoreu amb la màxima puntuació totes les possibles correctes solucions sempre que el procediment i el resultat siguin coherents amb l'enunciat.

A3.- Determineu totes les solucions de l'equació

$$3x+\frac{9}{2}=\left(\frac{4}{3}x+2\right)^2$$

Solució: Operant amb les expressions es té

$$3x+\frac{9}{2}=\frac{16}{9}x^2+\frac{16}{3}x+4$$

$$\frac{16}{9}x^2+\frac{7}{3}x-\frac{1}{2}=0$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $x=\frac{3}{16}$ i $x=\frac{-3}{2}$.

Puntuació: 0,5 punts per l'obtenció d'una equació de segon grau correcta. 0,5 punts per la resolució de l'equació. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions algebraiques.

A4.- Justifiqueu que $F(x) = ln\left(\frac{3x+1}{2-x}\right)$ és una primitiva de $f(x) = \frac{7}{2+5x-3x^2}$

Solució: S'ha de comprovar que $F'(x) = f(x)$. En efecte
$F'(x) = \frac{2-x}{3x+1} \cdot \frac{3\cdot(2-x)-(3x+1)\cdot(-1)}{(2-x)^2} = \frac{1}{3x+1} \cdot \frac{6-3x+3x+1}{(2-x)} = \frac{7}{(3x+1)\cdot(2-x)} = \frac{7}{2+5x-3x^2}$

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul de la derivada. 0,5 punts per la simplificació. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en el càlcul de la derivada o en les operacions algebraiques.

A5.- Determineu el valor de m per al qual el producte de les matrius $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ és commutatiu, és a dir, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$.

Solució: Calculem els dos productes de matrius i igualem els resultats obtinguts:
$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 18+6m \\ 26 & 12+4m \end{pmatrix}$
$\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 26 \\ 18+6m & 12+4m \end{pmatrix}$
Per tant, s'ha de verificar $18 + 6m = 26$, d'on $m = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul correcte del producte de matrius. 0,5 punts per la determinació del valor correcte de m. Considereu correctes altres resolucions, com per exemple, la observació que si $\boldsymbol{A} = 3 \cdot \boldsymbol{B}$**,** aleshores el producte és commutatiu, malgrat que això no justifiqui que la solució sigui única.

Exercicis Opció B

B1.- Determineu el valor de m que fa que les rectes $r: (x, y, z) = (1, 3, 1) + \lambda(2, m, -3)$ i $s: \frac{x-2}{-4} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{6}$ siguin paral·leles.

Solució: Les rectes són paral·leles quan els seus vectors directors són proporcionals, és a dir, quan $v = \alpha \cdot u$, on $u = (2, m, -3)$ i $v = (-4, 5, 6)$. D'aquesta manera, es té $(-4, 5, 6) = \alpha \cdot (2, m, -3)$, d'on $\alpha = -2$ i $m = \frac{-5}{2}$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre els vectors directors. 0,5 punts per la determinació correcta de m.

B2.- Comproveu que el pendent de la recta tangent a la funció $f(x) = 7 \cdot e^{2x-6}$ en el punt d'abscissa $x = 3$ és 14.

Solució: El pendent de la recta tangent és el valor de la derivada de la funció en $x = 3$.
$m = f'(x) = 14 \cdot e^{2x-6}; f'(3) = 14 \cdot e^0 = 14$

Puntuació: 0,5 punts pel raonament del pendent de la recta tangent. 0,5 pel càlcul correcte de la derivada. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greu de càlcul, com pot ser la no aplicació de la regla de la cadena o el canvi en l'exponent de la funció.

B3.- Calculeu el determinant $\det(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})$ del producte de les matrius $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}$.

Solució: Calculem el producte de les matrius:
$\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\\ 1/2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ 6 & 2 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}$; $\det(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A})=det\begin{pmatrix}6 & 2 & -2\\ 6 & 2 & -2\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}=0,$
perquè les dues primeres files de la matriu són iguals.

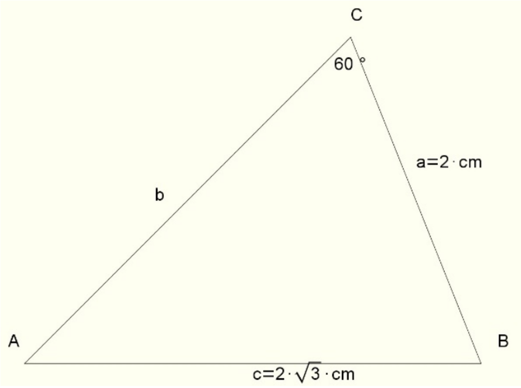
Puntuació: 0,5 punts pel producte de matrius. 0,5 punts pel càlcul del determinant. Penalitzeu amb fins 0,5 punts el càlcul incorrecte del producte de matrius, com per exemple el càlcul del producte $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$. Valoreu el càlcul del determinant de forma independent respecte el càlcul del producte matricial.

B4.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x)=3x-e^{-2x}$.

Solució: La funció $F(x)=\frac{3x^2}{2}+\frac{e^{-2x}}{2}$ és una primitiva de $f(x)$ perquè $F'(x)=f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul correcte de cadascun dels sumands.

B5.- En un triangle ABC es coneixen els costats $a=2\,cm$ i $c=2\sqrt{3}\,cm$, i l'angle oposat al costat c, l'angle $C=60°$. Utilitzeu el teorema del sinus per a calcular l'angle A, oposat al costat a.



Solució: Apliquem el teorema del sinus:

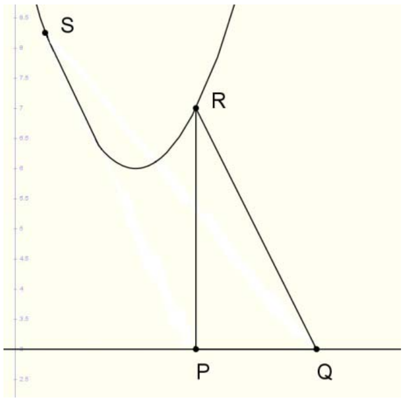
$$\frac{2}{\sin(A)}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin(60°)}\Rightarrow\sin(A)=\frac{2\cdot\sin(60°)}{2\sqrt{3}}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)=30°$$

Puntuació: 0,5 punts per l'expressió correcta del teorema del sinus. 0,5 punts per la determinació de l'angle.

Problema 1.-

1.- Considereu la paràbola $y = x^2 - 4x + 10$, i els punts $P(3,3)$ i $Q(5,3)$ de la recta horitzontal $y = 3$.

a) Justifiqueu que el punt $R(3,7)$ és un punt de la paràbola.
b) Determineu l'àrea del triangle PQR.
c) Determineu un altre punt $S(x,y)$ de la paràbola tal que l'àrea del triangle PQS sigui igual a l'àrea del triangle PQR.



Solució.-

a) En efecte, el punt $R(3,7)$ verifica l'equació de la paràbola
$y = x^2 - 4x + 10 \longrightarrow 3^2 - 4 \cdot 3 + 10 = 7$.

b) La base del triangle és la distància entre els punts P i Q (és a dir, $5 - 3 = 2$), i l'altura és la distància de P a R (és a dir, $7 - 3 = 4$). D'aquesta manera, l'àrea del triangle PQR és $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.

c) El punt $S(x,y)$ és un punt de la paràbola, per tant, $y = x^2 - 4x + 10$, és a dir, $S(x, x^2 - 4x + 10)$.
La base del triangle PQS és la distància entre els punts P i Q (és a dir, $5 - 3 = 2$), i l'altura és la distància de S a la recta horitzontal $y = 3$ (és a dir, $x^2 - 4x + 10 - 3 = x^2 - 4x + 7$). D'aquesta manera, si l'àrea del triangle PQS ha de ser 4, es té l'equació $A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (x^2 - 4x + 7) = 4$.

Resolent l'equació $x^2 - 4x + 7 = 4 \longrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$, tenim les dues solucions $x = 3$ (correspon al punt R) i $x = 1$, corresponent al punt $S(1,7)$.

Puntuació.- Apartat **a)** 1 punt. **b)** 1 punt. **c)** 1 punt per la formulació del punt S; 1 punt per l'equació i 1 punt per la solució i la seva interpretació. Valoreu amb la màxima puntuació les respostes coherents i sense tenir en compte les possibles errades dels apartats anteriors.

Problema 2.-

Una pilota de goma cau verticalment des d'un edifici de h metres d'altura i bota vàries vegades. Cada vegada que topa a terra i bota, perd una part de la seva energia, de forma que puja fins a una altura que és el 80% de l'altura anterior. Hom sap que, després de topar a terra dues vegades i botar, puja $7{,}68$ metres d'altura.

a) Determineu l'altura de l'edifici des del qual ha caigut inicialment la pilota.
b) Calculeu els metres totals recorreguts per la pilota quan topa a terra per cinquena vegada.
c) Des de quina altura hauria de caure la pilota per tal que després del tercer bot arribés a una altura de 10 metres?

Solució.-

a) Anomenem h_n l'altura a la qual arriba la pilota després de topar a terra per enèsima vegada. Aleshores,
$h_1 = 0.8h$
$h_2 = 0.8h_1 = (0.8)^2 h = 7{,}68$, d'on $h = 12$ metres.

b) Quan topa a terra per cinquena vegada, la pilota ha recorregut l'altura inicial h una vegada i dues vegades (una de pujada i una de baixada) cadascuna de les quatre altures següents després de botar. Per tant, l'espai total recorregut és

$$E = h + 2(h_1 + h_2 + h_3 + h_4)$$

La successió d'altures h_n formen una progressió geomètrica de raó $r = 0.8$, per tant, la suma dels quatre primers termes és

$$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = \frac{h_1 - h_5}{1 - r} = \frac{0.8h - (0.8)^5 h}{1 - 0.8} = 28.34$$

D'aquesta manera, la pilota ha recorregut un total de

$$E = h + 2(h_1 + h_2 + h_3 + h_4) = 12 + 2 \cdot 28.34 = 68.68 \text{ metres}$$

c) Adaptant el primer apartat, es té que l'altura hauria de ser
$h_3 = (0.8)^3 h = 10$, d'on $h = 19.53$ metres.

Puntuació.- Apartat **a)** 1 punt. Apartat **b)** 0,5 punts per l'expressió correcta de l'espai total recorregut, 2 punts per la suma de la progressió geomètrica, 0,5 punts pel càlcul final. Apartat **c)** 1 punt. Penalitzeu amb fins 0,5 punts una expressió errònia de l'espai total recorregut i amb fins 0,5 punts la determinació incorrecta de la quantitat de bots que farà la pilota.