Sèrie 3

Exercicis Opció A

A1.- Justifiqueu que la recta $r\colon (x, y, z) = (3, 1, 2) + \alpha(-2, 1, 1)$ i el pla $\pi\colon 2x - y + 5z + 15 = 0$ són paral·lels.

Solució: La recta i el pla són paral·lels o coplanaris si el vector director de la recta, $v = (-2,1,1)$, i el vector normal del pla, $n = (2, -1, 5)$, són perpendiculars, és a dir, el seu producte escalar és igual a zero.
En efecte, $v \cdot n = (-2, 1,1) \cdot (2, -1,5) = -4 - 1 + 5 = 0$.

Puntuació: 0,5 punts pel raonament sobre la posició relativa dels dos objectes i 0,5 punts pel càlcul del producte. Considereu correctes altres resolucions, com el plantejament d'un sistema incompatible format per les equacions de la recta i el pla.

A2.- Comproveu que per a tots els valors de m la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}$ verifica que $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{A}$, on $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat d'ordre 2.

Solució: Calculem el primer terme de l'expressió anterior:

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m & 1 \end{pmatrix}$$

Substituint les matrius en l'equació $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{A}$ es té:

$$\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2m & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2m & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} = 2\boldsymbol{A}$$

Per tant, per a tots els valors de m es verifica l'equació $\boldsymbol{A}^2 + \boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{A}$.

Puntuació: 0,5 punts per les operacions matricials; 0,5 punts per la interpretació del resultat.

A3.- Determineu l'abscissa del punt en el qual la recta tangent a la paràbola $f(x) = 8x^2 - 5x + 1$ és paral·lela a la recta $r\colon y = 3x - 2$.

Solució: Per tal de ser paral·lela a r, la recta tangent a la paràbola ha de tenir el mateix pendent que la recta, és a dir, s'ha de verificar que $f'(a) = 3$.
$f'(x) = 16x - 5$; $f'(a) = 16a - 5 = 3$, d'on es té que $a = \frac{1}{2}$, és l'abscissa del punt.

Puntuació: 0,5 punts pel plantejament del paral·lelisme i 0,5 punts per la determinació correcta de l'abscissa del punt.

A4.- Resoleu l'equació exponencial $\frac{e^{(3x+1)}}{e^{(x-1)}} = e^{(x+1)}$.

Solució: Simplifiquem l'equació utilitzant les propietats de la funció exponencial:

$$e^{(x+1)} = \frac{e^{(3x+1)}}{e^{(x-1)}} = e^{(3x+1)-(x-1)} = e^{(2x+2)}$$

$$x + 1 = 2x + 2$$

$x = -1$ és l'única solució de l'equació.

Puntuació: 0,5 punts per les operacions amb les funcions exponencials i 0,5 punts per la resolució correcta de l'equació obtinguda.

A5.- Determineu el domini de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1) - \sqrt{x+1}$.

Solució: Atès que $x^2 + 1 > 0$, per a tots els valors de x es pot calcular $\ln(x^2 + 1)$. Respecte l'arrel quadrada, s'ha de verificar que $x + 1 \geq 0$, és a dir, $x \geq -1$. Per tant, el domini de la funció és l'interval $[-1, +\infty[$.

Puntuació: 0,5 punts pel domini corresponent al logaritme i 0,5 punts pel domini corresponent a l'arrel.

Exercicis Opció B

B1.- Justifiqueu que per a tots els valors de m el sistema $\begin{cases} x + my + z = 0 \\ 3x + (m+1)y + 4z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ sempre té infinites solucions.

Solució: El sistema és homogeni, per tant és compatible. Per tal que sigui indeterminat (infinites solucions), el determinant de la matriu del sistema ha de ser igual a zero:

$$det\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ 3 & m+1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 3(m+1) + 3 + 8m - 2(m+1) - 4 - 9m = 0$$

El sistema té sempre infinites solucions.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul del determinant i 0,5 punts per la interpretació correcta dels resultats.

B2.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x) = 3x^2 - 2e^{3x}$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = x^3 - \frac{2}{3}e^{3x}$, perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands expressat correctament.

B3.- Justifiqueu que la recta $r\colon \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{2}$ està continguda en el pla $\pi\colon 6x - 2y + z - 16 = 0$.

Solució: Atès que per dos punts passa una única recta, si dos punts qualssevol de la recta també són punts del pla, aleshores tota la recta estarà continguda en el pla. Podem considerar els punts de la recta $P(2,-2,0)$ i $Q(4,6,4)$. Substituint aquests dos punts en l'equació del pla, es té
$6 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) + 0 - 16 = 0$, i per tant, P és un punt del pla.
$6 \cdot 4 - 2 \cdot 6 + 4 - 16 = 0$, i per tant, Q és un punt del pla.
En conseqüència, la recta està continguda en el pla.

Puntuació: 1 punt. Valoreu amb la màxima qualificació qualsevol altra argumentació vàlida sobre la posició relativa de la recta i el pla.

B4.- Justifiqueu que la funció $f(x) = (2x-4) \cdot e^x$ té un mínim en el punt d'abscissa $x = 1$.

Solució: Podem comprovar que la primera derivada s'anul·la en $x = 1$ (condició necessària) i que la segona derivada en $x = 1$ és estrictament positiva (condició suficient).
$f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x-4) \cdot e^x = (2x-2) \cdot e^x$; $f'(1) = 0$.
$f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x-2) \cdot e^x = 2x \cdot e^x$; $f''(1) = 2e > 0$.

Puntuació: 0,5 punts per la condició necessària i 0,5 punts per la condició suficient. Valoreu amb 0,5 punts el càlcul correcte de les dues derivades. Penalitzeu amb 0,5 punts les errades greus en el càlcul de les derivades.

B5.- Escriviu una equació del pla que passa pel punt $P(1,2,3)$ i és paral·lel a la recta $r\colon \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-3}{3}$.

Solució: Per tal que la recta i el pla siguin paral·lels, el vector director de la recta, $v = (1,-1,3)$, ha de coincidir amb el vector normal del pla, les components del qual són els coeficients de l'equació del pla $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$, és a dir,
$\pi\colon x - y + 3z + D = 0$. Substituint el punt $P(1,2,3)$ en l'equació del pla, és té
$1 - 2 + 3 \cdot 3 + D = 0$, d'on $D = -8$. L'equació del pla resulta ser
$\pi\colon x - y + 3z - 8 = 0$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre el vectors director de la recta i el vector normal del pla i 0,5 punts per la determinació correcta de tots els coeficients de l'equació del pla.

Problema 1.-

L'empresa XTE fabrica dos tipus de telèfons mòbils, T-Truc i T-Call, i dedica a aquesta tasca exactament 240 hores en el departament d'electrònica i 100 hores en el departament de muntatge.
Cada T-Truc es ven a 800 € i necessita 4 hores de treball en electrònica i 2 hores en muntatge. Cada T-Call es ven a 500 € i requereix 3 hores de treball en electrònica i 1 hora en el departament de muntatge.

a) Plantegeu un sistema d'equacions que permeti determinar la producció de cada model de telèfon.

b) Resoleu el sistema anterior i calculeu els ingressos que proporciona la solució obtinguda.

Solució.-

a) Representem per x i y la producció de T-Truc i T-Call, respectivament.
La utilització de les hores del departament d'electrònica es representa
$4x + 3y = 240$
i la utilització de les hores del departament de muntatge es formula
$2x + y = 100$
El sistema d'equacions que permet determinar la producció és $\begin{cases} 4x + 3y = 240 \\ 2x + y = 100 \end{cases}$

b) Per resoldre aquest sistema, multipliquem per 2 la segona equació
$\begin{cases} 4x + 3y = 240 \\ 4x + 2y = 200 \end{cases}$; restem la segona equació de la primera i es té $\boxed{y = 40}$.
Substituint aquest valor en la segona equació del sistema original,
$2x + y = 100$, s'obté $\boxed{x = 30}$.
Per tant, la producció és de 30 T-Truc i de 40 T-Call. Els ingressos obtinguts amb aquesta producció són
$800x + 500y = 800 \cdot 30 + 500 \cdot 40 = 24\,000 + 20\,000 = 44\,000$ €.

Puntuació.- Apartat **a)** 1,5 punts per cadascuna de les equacions del sistema; apartat **b)** 1,5 punts per la resolució del sistema i 0,5 punts pel càlcul dels ingressos. Valoreu amb la màxima puntuació la resolució adequada del sistema plantejat, malgrat aquest no sigui correcte, sempre i quan la solució obtinguda tingui significat (per exemple, no s'obtenen solucions negatives).

Problema 2.-

Considereu les funcions $f(x) = \frac{2}{x} + 2x$ i $g(x) = x + 3$.

a) Comproveu que els punts d'intersecció de les dues funcions són els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 2$.

b) Calculeu la integral definida

$$\int_1^2 [g(x) - f(x)]\,dx$$

Solució.-

a) Igualant les dues funcions es té $\frac{2}{x} + 2x = x + 3 \rightarrow\ 2 + 2x^2 = x^2 + 3x \rightarrow\ x^2 - 3x + 2 = 0$. L'equació de grau 2 resultant té solucions $x = 1,\ x = 2$.

Les funcions es tallen en dos punts: el punt $(1,\ 4)$ i el $(2,\ 5)$.

Alternativament, també es pot comprovar que $f(1) = g(1) = 4$ i $f(2) = g(2) = 5$.

b) L'àrea resulta ser

$$\int_1^2 [g(x) - f(x)]\,dx = \int_1^2 \left[(x+3) - \left(\frac{2}{x} + 2x\right)\right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left(-x - \frac{2}{x} + 3\right) dx = -\frac{1}{2}x^2 - 2\ln(x) + 3x\Big|_1^2 = \frac{3}{2} - 2\ln 2 \approx 0{,}114\ u^2$$

Puntuació.- Apartat ***a)*** 1 punt cada abscissa d'intersecció trobada. Apartat **b)**, 2 punts per determinar una primitiva i 1 punt per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.