Sèrie 1

Exercicis Opció A

A1.- Determineu els valors de p per als quals la matriu $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} p & -p \\ -p & p \end{pmatrix}$ verifica $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$.

Solució: Substituint la matriu $\boldsymbol{A}$ en l'equació matricial es té $\boldsymbol{A}^2 = \begin{pmatrix} p & -p \\ -p & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & -p \\ -p & p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p^2 & -2p^2 \\ -2p^2 & 2p^2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} p & -p \\ -p & p \end{pmatrix}$; és a dir, s'ha de verificar la relació $2p^2 = p$. Les dues úniques solucions són $p = 0$ i $p = \frac{1}{2}$.

Puntuació: 0,5 punts per l'obtenció correcta de la relació de segon grau i 0,5 punts per la determinació correcta de les dues solucions.

A2.- Escriviu una equació de la recta r que passa pel punt $P(-2, 1, 1)$ i és perpendicular al pla $\pi: 2x - 3y + 4z = 5$. Raoneu si el punt $Q(0, -2, 1)$ pertany a la recta r o no hi pertany.

Solució: El vector director de la recta ha de ser paral·lel al vector normal del pla $n = (2, -3,\ 4)$. L'equació contínua de la recta r que passa per P i té aquest vector director és r: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$.
Substituint el punt $Q(0, -2, 1)$ en l'equació de la recta: $\frac{0+2}{2} = \frac{-2-1}{-3} \neq \frac{1-1}{4}$; per tant, el punt Q no pertany a la recta.

Puntuació: 0,5 punts per l'equació de la recta. Valoreu amb 0,5 punts la justificació de la posició relativa de Q respecte la recta, tant si l'equació de la recta és correcta com si no ho és.

A3.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x) = 7x^2 + \frac{5}{x}$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = \frac{7}{3}x^3 + 5\ln x$ ja que $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands.

A4.- Resoleu l'equació $\frac{6}{5} + \frac{9}{10(x-2)} = \frac{11}{5(x+3)}$.

Solució: Operem i simplifiquem i les fraccions de l'equació:

$$\frac{6}{5} + \frac{9}{10(x-2)} = \frac{11}{5(x+3)}$$

$$\frac{12(x-2)+9}{10(x-2)} = \frac{11}{5(x+3)}$$

$$\frac{12x-15}{10(x-2)} = \frac{11}{5(x+3)}$$

$(12x-15)\cdot(x+3)=11\cdot 2(x-2)$

$12x^2+21x-45=22x-44$

$12x^2-x-1=0$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $x=\frac{1}{3}$ i $x=\frac{-1}{4}$.

Puntuació: 0,5 punts per les operacions entre fraccions i 0,5 punts pel càlcul de les dues solucions. Penalitzeu amb 0,5 punts les errades greus en les operacions algebraiques, com per exemple, errades en l'aplicació de la propietat distributiva.

A5.- Determineu l'única solució estrictament positiva $(x>0)$ de l'equació següent: $\ln(2x)+\ln(x+1)=\ln(3x+1)$.

Solució: Només es pot calcular el logaritme neperià dels números estrictament positius; per tant, per tal que l'equació tingui significat, s'ha de verificar que $2x>0,\ x+1>0,\ 3x+1>0$, és a dir, $x>0$. A més, per les propietats dels logaritmes, es té que
$\ln(2x)+\ln(x+1)=\ln\big((2x)\cdot(x+1)\big)=\ln(2x^2+2x)=\ln(3x+1)$
$2x^2+2x=3x+1$
$2x^2-x-1=0$
Aquesta equació de segon grau té dues solucions, una positiva $(x=1)$ i una altra negativa $(x=\frac{-1}{2})$, que hem de descartar.

Puntuació: 0,5 punts per l'aplicació de les propietats dels logaritmes i l'obtenció de l'equació de segon grau. 0,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Valoreu únicament amb 0,5 punts una resposta amb la justificació que $x=1$ és una solució però sense comentaris sobre la seva unicitat.

Exercicis Opció B

B1.- Determineu el domini de la funció $f(x)=\sqrt{6+7x-20x^2}$.

Solució: El domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors pels quals $6+7x-20x^2\geq 0$. Atès que es tracta d'una paràbola orientada negativament, els valors positius es troben entre les dues arrels de l'equació $6+7x-20x^2=0$, que són $x=\frac{3}{4}$ i $x=\frac{-2}{5}$. El domini resulta ser l'interval tancat $\mathcal{D}(f)=\left[\frac{-2}{5},\frac{3}{4}\right]$.

Puntuació: 0,5 punts per l'argumentació del domini i 0,5 punts per la determinació correcta de l'interval.

B2.- Justifiqueu que la intersecció de la recta $r: (x, y, z) = (1, -2, 0) + \alpha(1, 2, 3)$ i el pla $\pi: (x, y, z) = (1, -2, 0) + \lambda(1, 1, 1) + \mu(2, 1, 1)$ és un únic punt.

Solució: En les equacions de la recta r i el pla π es pot veure que tots dos passen pel punt $P(1, -2, 0)$. Si la recta i el pla es tallen en un sol punt no poden ser coplanaris ni paral·lels, per tant els seus vectors directors han de ser independents; és a dir, el determinant format pels tres vectors directors ha de ser diferent de zero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Puntuació: 0,5 per qualsevol argumentació correcta de la posició relativa de la recta i el pla. 0,5 punts per la interpretació correcta dels resultats. No és necessari determinar el punt d'intersecció.

B3.- Determineu l'abscissa x del punt en el qual la derivada de la funció $f(x) = 2x - 2\ln(x - 1)$ és igual a 1, és a dir, $f'(x) = 1$.

Solució: Calculem la derivada de la funció i escrivim l'equació corresponent: $f'(x) = 2 - \frac{2}{x-1} = 1$; és a dir, $\frac{2}{x-1} = 1$. La solució és $x = 3$.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada de la funció i 0,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades en el càlcul de la derivada.

B4.- Calculeu l'àrea d'un triangle equilàter de $5\ cm$ de costat.

Solució: En aquest triangle, tots els costats tenen $5\ cm$ de costat i tots els angles són de $60°$. L'altura és de $a = 5 \cdot \sin(60) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ i l'àrea és

$$A = \frac{1}{2} b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}\ cm^2$$

Puntuació: 1 punt. Considereu correctes altres formes de resolució, com per exemple la utilització de la fórmula $A = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}$, on p és el semiperímetre, i a, b, c són les longituds dels costats.

B5.- Determineu els valors de m pels quals $(x,y)=(3,2)$ és una solució del sistema
$$\begin{cases}(m+1)x-(m^2-1)y=6\\ 2x+y=8\end{cases}$$

Solució: Substituint $(x,y)=(3,2)$ en el sistema es té:
$\begin{cases}(m+1)\cdot 3-(m^2-1)\cdot 2=6\\ 2\cdot 3+2=8\end{cases}$. La segona equació es verifica, i la primera

s'expressa com $-2m^2+3m-1=0$; les solucions d'aquesta equació de segon grau són $m=\frac{1}{2}$ i $m=1$.

Puntuació: 0,5 pel raonament de la solució del sistema. 0,5 punts per la determinació correcta dels valors de m.

Problema 1.-

Considereu la paràbola $f(x)=c+bx-\frac{1}{2}x^2$ i la recta $s\colon y=-x+\frac{23}{2}$.

a) Determineu els valors dels paràmetres b i c que fan que el vèrtex de la paràbola es trobi en el punt $P(3,\ 8)$.

b) Escriviu l'equació de la recta r tangent a la paràbola en el punt d'abscissa $x=2$.

c) Justifiqueu que les rectes r i s són perpendiculars i determineu el punt T d'intersecció entre elles.

Solució.-

a) En una paràbola, el vèrtex és un màxim o un mínim, l'abscissa del qual anul·la la primera derivada.
$f(x)=c+bx-\frac{1}{2}x^2$; $f'(x)=b-x$; $f'(3)=b-3=0$; per tant, $b=3$.
L'equació de la paràbola és $f(x)=c+3x-\frac{1}{2}x^2$.
El vèrtex de la paràbola es troba en el punt $P(3,\ 8)$, per tant
$f(3)=c+3\cdot 3-\frac{1}{2}\cdot 9=8$, d'on es dedueix $c=\frac{7}{2}$. D'aquesta manera, l'equació de la paràbola és $f(x)=\frac{7}{2}+3x-\frac{1}{2}x^2$.

b) L'equació de la recta tangent a la funció és $y=f'(a)(x-a)+f(a)$, on $a=2$.
Calculem els coeficients d'aquesta equació.
$f(a)=f(2)=\frac{7}{2}+3\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot 4=\frac{15}{2}$.
$f'(x)=3-x$; $f'(a)=f'(2)=1$.
L'equació de la recta tangent és $y=1\cdot(x-2)+\frac{15}{2}$, és a dir $r\colon y=x+\frac{11}{2}$.

c) Les rectes r i s són perpendiculars, atès que els seus pendents ($m=1$ i $m'=-1$, respectivament) són inversos i oposats ($m'=\frac{-1}{m}$).

La intersecció de les rectes és la solució del sistema $\begin{cases} y = x + \frac{11}{2} \\ y = -x + \frac{23}{2} \end{cases}$. Igualant les dues equacions, es té $x + \frac{11}{2} = -x + \frac{23}{2}$, d'on es dedueix $x = 3$. El punt d'intersecció és el punt $T(3, \frac{17}{2})$.

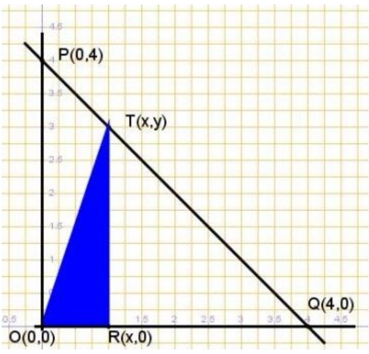
Puntuació.- Apartat **a)** 2 punts (1 punt per la determinació correcta de cadascun dels paràmetres b i c). Apartat **b)**, 0,5 punts pel càlcul de la derivada i 0,5 punts per l'expressió de la recta tangent; penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades de càlcul. Apartat **c)**, 1 punt pel raonament de la perpendicularitat i 1 punt per la determinació del punt d'intersecció. En la correcció, valoreu els diferents apartats de forma independent, sense tenir en compte les errades de càlcul que s'hagin comès en apartats anteriors i que portin a solucions diferents.

Problema 2.-

Considereu els punts $O(0,0)$, $P(0,4)$ i $Q(4,0)$ representats en el gràfic.

a) Escriviu l'equació de la recta $r: y = mx + n$ que passa pels punts P i Q.

b) Considereu un punt $T(x,y)$ del segment $\overline{PQ}$ de la recta r, i un punt $R(x,0)$ en la vertical de T, tal com mostra el gràfic.



Determineu les coordenades del punt T que fan que l'àrea del triangle de vèrtexs O, T i R sigui màxima i calculeu l'àrea d'aquest triangle.

Solució.-

a) L'equació de la recta és $r: y = mx + n$. Aquesta recta passa pels punts P i Q; substituint-los en l'equació de la recta tenim el sistema següent:

$P: 4 = m \cdot 0 + n$, d'on $n = 4$.

$Q: 0 = m \cdot 4 + 4$, d'on $m = -1$.

La recta resulta ser $r: y = -x + 4$.

b) Els punts $T(x,y)$ del segment $\overline{PQ}$ verifiquen $y = -x + 4$, és a dir, són de la forma $T(x, -x + 4)$.

L'àrea del triangle rectangle de vèrtexs O, T i R es calcula com

$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-x+4)$.

Per tal de trobar el màxim de la funció àrea hem de determinar el valor a pel qual $A'(a) = 0$ (condició necessària) i $A''(a) < 0$ (condició suficient).
$A(x) = \frac{1}{2} \cdot x \cdot (-x+4) = \frac{-1}{2}x^2 + 2x$; $A'(x) = -x + 2 = 0$, d'on $a = 2$. A més, $A''(x) = -1 < 0$, i per tant, es tracta d'un màxim.

D'aquesta manera, el punt T és el punt $T(2,2)$, i el triangle d'àrea màxima té un àrea de $2\,u^2$.

Puntuació.- Apartat **a)** 1 punt. Apartat **b)**: 1 punt per la caracterització dels punts del segment, 1 punt per l'expressió de la funció àrea, 1 punt per la condició necessària de màxim i 1 punt per la condició suficient de màxim. Considereu correctes altres maneres de determinar el màxim de la funció àrea, com per exemple, el vèrtex d'una paràbola orientada negativament.