Sèrie 3

Exercicis Opció A

A1.- Resoleu l'equació $\frac{2}{3}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{12(x+1)}=0$.

Solució: Realitzem les operacions indicades:

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{12(x+1)}=\frac{8x(x+1)+3(x+1)-x}{12x(x+1)}=\frac{8x^2+8x+3x+3-x}{12x(x+1)}=$$

$$=\frac{8x^2+10x+3}{12x(x+1)}=0$$

$$8x^2+10x+3=0$$

Les solucions d'aquesta equació de segon grau són $x=\frac{-1}{2}, x=\frac{-3}{4}$

Puntuació: 0,5 punts per les operacions entre fraccions i 0,5 punts pel càlcul de les dues solucions. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions de fraccions. Valoreu amb 0,5 punts la resolució correcta de l'equació obtinguda.

A2.- Justifiqueu que la inversa de la matriu $A=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ és la matriu $A+I$, en què I és la matriu identitat, $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Solució: Per tal que la matriu $A+I$ sigui la matriu inversa de la matriu A s'ha de verificar que $(A+I)\cdot A=A(A+I)=I$.

$$(A+I)\cdot A=\left(\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot(A+I)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\left(\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Puntuació: 0,5 punts per formular la igualtat. 0,5 punts per multiplicar les matrius. No és necessària la doble comprovació del producte de matrius. Considereu correctes altres maneres de respondre, com per exemple, el càlcul de la matriu inversa de la matriu A.

A3.- Escriviu una equació de la recta r que passa pels punts $P(1,1)$ i $Q(2,4)$. Determineu una equació de la recta s perpendicular a r i que passa pel punt Q.

Solució: El vector director de la recta que uneix els punts $P(1,1)$ i $Q(2,4)$ es pot calcular com $v = Q - P = (1,3)$. Una equació de la recta és
$r: (x,y) = P + \lambda v = (1,1) + \lambda(1,3)$.

Un vector director de la recta s perpendicular a r és $u = (3,-1)$. Una equació de la recta perpendicular que passa per Q és $s: (x,y) = Q + \lambda u = (2,4) + \lambda(3,-1)$.

Puntuació: 0,5 punts per l'equació de la recta r i 0,5 punts per l'equació de la recta perpendicular a la recta r donada, tant si aquesta és correcta com si no ho és. Valoreu amb la màxima puntuació altres expressions equivalents de les rectes.

A4.- Determineu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{3x-2}{1-x}$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

Solució:
L'equació de la recta tangent és $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. Calculem els coeficients d'aquesta equació:
$f(a) = f(2) = -4$
$f'(x) = \frac{3(1-x)-(3x-2)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}; f'(a) = f'(2) = 1.$
L'equació resulta ser $y = 1 \cdot (x-2) - 4 = x - 6$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del pendent de la recta tangent i 0,5 punts per l'equació de la recta.

A5.- Escriviu una equació del pla que passa pel punt $P(-1,1,-2)$ i és perpendicular a la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$.

Solució: Un vector normal del pla és el vector $v = (3,2,-1)$; l'equació del pla és $\pi: 3x + 2y - z = D$; substituint el punt $P(-1,1,-2)$ es determina el valor $D = -3 + 2 + 2 = 1$, i l'equació del pla és $\pi: 3x + 2y - z = 1$.

Puntuació: 0,5 punts pel vector normal i 0,5 punts per l'equació del pla.

Exercicis Opció B

B1.- Determineu els valors de m que fan que el sistema $\begin{cases}(2m+1)x+my=5\\(1-m)x+2y=5\end{cases}$ no tingui solució.

Solució: Per tal que aquest sistema sigui incompatible és necessari que el determinant de la matriu de coeficients sigui zero.

$$det\begin{pmatrix}2m+1 & m\\1-m & 2\end{pmatrix}=2(2m+1)-m(1-m)=m^2+3m+2=0$$

Les solucions de l'equació són $m=-1, m=-2$. Si m no és cap d'aquests valors, el sistema tindrà una única solució (serà compatible determinat).

En el cas $m=-1$, el sistema s'escriu $\begin{cases}-x-y=5\\2x+2y=5\end{cases}$, que és clarament incompatible.

En el cas $m=-2$, el sistema s'escriu $\begin{cases}-3x-2y=5\\3x+2y=5\end{cases}$, que també és clarament incompatible.

Per tant, el sistema no té solució quan $m=-1$ o bé quan $m=-2$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació dels valors de m. 0,5 punts per la interpretació correcta dels dos casos particulars.

B2.- Escriviu una equació del pla que passa pel punt $P(1,1,1)$ i és paral·lel al pla $\pi: 3x-2y+z=8$.

Solució: Un vector normal del pla és el vector $v=(3,-2,1)$; l'equació del pla paral·lel és $\pi_2: 3x-2y+z=D$; substituint el punt $P(1,1,1)$ es determina el valor $D=3-2+1=2$, i l'equació del pla paral·lel és $\pi_2: 3x-2y+z=2$.

Puntuació: 0,5 per la determinació del vector normal i 0,5 punts per la determinació del pla paral·lel.

B3.- Indiqueu una primitiva de la funció $f(x) = 8x^3 - 2e^x$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = 2x^4 - 2e^x$, perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands expressat correctament.

B4.- Calculeu el perímetre d'un triangle equilàter que té un vèrtex situat en el punt P(1,2) i un altre en el punt Q(1,6).

Solució: Calculem la distància entre els vèrtexs $d(P,Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(1-1)^2 + (2-6)^2} = 4$. Les longituds dels tres costats del triangle equilàter són iguals, i per tant el perímetre és 12.

Puntuació: 1 punt.

B5.- Calculeu la derivada de la funció $f(x) = x + 3\ln(x-1)$. Determineu l'únic valor del domini de la funció per al qual la derivada és igual a 2.

Solució: La derivada de la funció és $f'(x) = 1 + \frac{3}{x-1}$. Igualem a 2 i resolem l'equació

$$1 + \frac{3}{x-1} = 2$$

$$\frac{3}{x-1} = 1$$

$$3 = x - 1$$

La solució d'aquesta equació és $x = 4$, que és del domini de la funció.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul de la derivada i el plantejament de l'equació. 0,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Penalitzeu amb fins 0,5 punts les errades greus en les operacions.

Problema 1.-

1.- L'empresa *Texans* fabrica tres models de pantalons, a, b, c, i cada dia dedica a aquesta tasca exactament $2\,300$ hores de producció i $1\,650\ m^2$ de tela de cotó. La taula següent mostra les hores de producció i els metres quadrats de cotó que requereix l'elaboració d'un pantaló de cada model.

	Model a	Model b	Model c
Hores de producció	1	2	3
Metres quadrats de cotó	2	3	1

En aquesta empresa, la producció del model b representa el 20% de la producció diària total.

a) Escriviu i resoleu un sistema d'equacions per tal de determinar la producció diària de cada model de pantaló.

b) Sabent que el preu de venda de cada pantaló a, b, c és, respectivament, de 36 €, 40 € i 30 €, calculeu els ingressos diaris que obté l'empresa.

Solució.-

a) Anomenem x, y, z la producció diària de cada model de pantaló, a, b, c, respectivament. Les hores de producció utilitzades es formula com $x + 2y + 3z = 2\,300$.

La quantitat de tela utilitzada en la fabricació s'escriu $2x + 3y + z = 1\,650$.

Pel que fa al percentatge de pantalons del model b, es pot plantejar com $y = 0{,}2(x + y + z)$, la qual és equivalent a $0{,}2x - 0{,}8y + 0{,}2z = 0$, o també com $2x - 8y + 2z = 0$, és a dir, $x - 4y + z = 0$.

D'aquesta manera, s'ha de resoldre el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2300 \\ 2x + 3y + z = 1650 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

De la tercera equació es té $z = 4y - x$ Substituint en la segona equació $2x + 3y + (4y - x) = x + 7y = 1650$, és a dir, $x = 1650 - 7y$.
Així, es té $z = 4y - x = 4y - 1650 + 7y = 11y - 1650$.

Utilitzant aquests dos resultats en la primera equació s'acaba la resolució $(1650 - 7y) + 2y + 3(11y - 1650) = 28y - 3300 = 2300$, $y = \frac{2300+3300}{28} = 200$.

La solució única és $\boxed{x = 250,\ y = 200,\ z = 550}$ pantalons de cada model.

b) Per determinar els ingressos, substituïm la solució en l'expressió $36x + 40y + 30z = 36 \cdot 250 + 40 \cdot 200 + 30 \cdot 550 = 33\,500$ € diaris.

Puntuació.- Apartat ***a)***, 2 punts per plantejar correctament el sistema i 2 punts per la solució. Considereu la possibilitat de puntuar amb 2 punts aquells exercicis que, sense ser correctes, resolen els sistemes d'equacions adequadament i obtenen solucions coherents (per exemple, sense valors negatius en la producció). Apartat ***b)***, 1 punt, sempre que la solució obtinguda en l'apartat anterior sigui consistent.

Problema 2.-
Considereu la paràbola $f(x) = 8x - x^2 - 12$.

a) Determineu el vèrtex de la paràbola.
b) Escriviu l'equació de la recta r tangent a la paràbola en el punt d'abcissa $x = 5$.
c) Indiqueu els punts d'intersecció, P i Q, de la recta tangent r determinada en l'apartat anterior amb l'eix d'abcisses i amb l'eix d'ordenades. Determineu l'àrea del triangle de vèrtexs P, Q i l'origen de coordenades, $O(0,0)$.

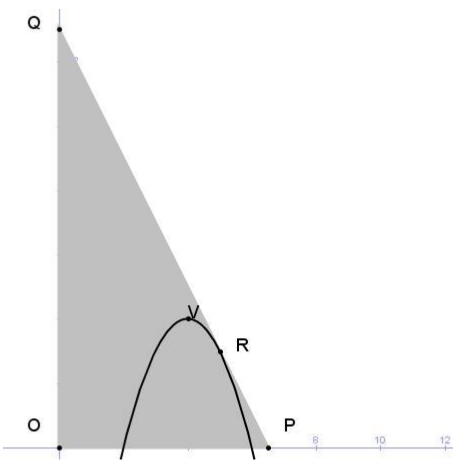
Solució.-

a) Atès que la paràbola està orientada negativament, el seu vèrtex es correspon amb el màxim, és a dir, amb el punt l'abcissa del qual anul·la la primera derivada: $f'(x) = 8 - 2x = 0$. El màxim es troba en el punt d'abcissa $x = 4$. Substituint en l'equació de la paràbola es té
$f(4) = 8 \cdot 4 - 4^2 - 12 = 4$, és a dir, el vèrtex és el punt $V(4{,}4)$.

b) L'equació de la recta tangent és $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$. Substituint el valor $a = 5$ en la funció i en la seva derivada, es té
$f(a) = f(5) = 8 \cdot 5 - 5^2 - 12 = 3$.
$f'(a) = f'(5) = 8 - 2 \cdot 5 = -2$.
L'equació de la recta tangent resulta ser r: $y = -2(x - 5) + 3 = -2x + 13$.

c) La intersecció amb l'eix d'abcisses es té quan $y = 0$; resolent $-2x + 13 = 0$, es té el punt $P(\frac{13}{2}, 0)$.
La intersecció amb l'eix d'ordenades es té quan $x = 0$; aleshores $y = -2 \cdot 0 + 13 = 13$, i es té el punt $Q(0, 13)$.

A la figura inferior tenim una representació del problema.



La longitud de la base del triangle (distància de P a O) és $b = \frac{13}{2}$, i l'altura és l'ordenada del punt Q, és a dir, $a = 13$. L'àrea del triangle resulta ser $A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 13 = \frac{169}{4}$.

Puntuació.- 1 punt cadascun dels apartats **a)** i **b)**. Apartat **c)**, 1 punt per la determinació correcta de cada punt d'intersecció amb els eixos; 1 punt per la determinació correcta de l'àrea. Considereu correctes altres formes vàlides de determinar el vèrtex de la paràbola i l'àrea del triangle. Valoreu de forma independent la resolució de cada apartat, és a dir, no tingueu en compte els errors comesos en apartats anteriors. Valoreu amb la màxima puntuació el càlcul encertat de l'àrea d'un triangle, malgrat els vèrtexs o la recta tangent no siguin correctes. Valoreu amb fins 1 punt una representació gràfica aproximada del problema.