Sèrie 3

Exercicis Opció A

A1.- Trobeu el perímetre d'un triangle de 3 m de base i amb els angles de 30º, 30º i 120º, en què l'angle de 120^0 és l'oposat a la base.

Solució:
Segons el teorema del sinus, $\frac{3}{\sin(120)} = \frac{B}{\sin(30)} = \frac{C}{\sin(30)}$. Substituint $\sin(120) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin(30) = \frac{1}{2}$, es té que $B = C = \sqrt{3}$ i el perímetre del triangle és $A + B + C = 3 + 2\sqrt{3}$.

Puntuació: 1 punt.

A2.- Determineu el domini de la funció $f(x) = \ln(4x - x^2 - 3)$.

Solució: El domini de la funció són els valors pels quals es pot calcular el logaritme neperià, és a dir, els valors pels quals $-x^2 + 4x - 3 > 0$. Les dues arrels d'aquesta paràbola són $x = 1$, $x = 3$; atès que el coeficient de major grau de la paràbola és negatiu, la paràbola pren valors positius entre aquestes dues arrels, és a dir, el domini de la funció és l'interval obert $(1, 3)$.

Puntuació: 0,25 punts per l'argumentació del domini del logaritme, 0,25 punts per la determinació de les arrels i 0,5 punts per la determinació correcta de l'interval.

A3.- Indiqueu els valors de m que fan que la matriu $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & m+1 \\ m-1 & 2 \end{pmatrix}$ tingui inversa.

Solució: Una matriu quadrada té inversa si i només si el seu determinant és diferent de zero. Calculant el determinat de la matriu i igualat a zero, tenim $det\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & m+1 \\ m-1 & 2 \end{pmatrix} = 4 - m^2 = 0$; les dues solucions són $m = -2,\ m = +2$. Per tant, la matriu té inversa quan m no és cap d'aquests valors, $m \notin \{-2, 2\}$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació dels valors $m = -2,\ m = +2$. 0,5 punts per la interpretació correcta dels resultats. Considereu la possibilitat de valorar amb 0,5 punts les respostes que, malgrat els errors de càlcul, incorporin una argumentació coherent amb els resultats obtinguts.

A4.- Justifiqueu que la funció $f(x) = xe^x$ té un mínim relatiu en $x = -1$.

Solució: La derivada $f'(x) = (x+1)e^x$ s'anul·la en el punt $x = -1$. A més, la segona derivada és positiva en el punt crític
$f''(x) = (x+2)e^x; f''(-1) = (1)e^{-1} > 0$, la qual cosa indica que es tracta d'un mínim.

Puntuació: 0,5 punts per la primera derivada i comprovar que s'anul·la en el punt crític. 0,5 punts per la condició suficient de mínim.

A5.- Determineu els valors de B, C i D que fan que el pla $\Pi: 4x + By + Cz = D$ passi pel punt $(1,1,-1)$ i sigui perpendicular a la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = z+1$.

Solució: El vector director de la recta és $v = (2,-3,1)$, i ha de ser paral·lel al vector normal del pla $n = (4,\ B,\ C)$; per tant, $B = -6,\ C = 2$. Per determinar el valor de D substituïm el punt $(1,1,-1)$ en l'equació del pla:
$4x - 6y + 2z = 4\cdot 1 - 6\cdot 1 + 2(-1) = -4 = D$

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del vector normal i 0,5 punts per la determinació correcta de l'equació.

Exercicis Opció B

B1.- Determineu el valor de m que fa que la recta $r: \frac{x+1}{m+1} = \frac{y-1}{m-4} = \frac{z}{-1}$ sigui paral·lela al pla $\Pi: (x,y,z) = (1,0,1) + \lambda(1,-2,1) + \mu(0,-1,3)$.

Solució: El vector director de la recta $v = (m+1, m-4, -1)$ ha de ser paral·lel als vectors directors del pla $u_1 = (1,-2,1), u_2 = (0,-1,3)$, i per tant, el determinant de la matriu $\begin{pmatrix} m+1 & m-4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ ha de ser zero. D'aquesta manera tenim
$det\begin{pmatrix} m+1 & m-4 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 8 - 8m = 0$, d'on $m = 1$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre vectors. 0,5 punts per la determinació correcta del valor de m. Valoreu amb 0,5 punts qualsevol altra argumentació coherent. No tingueu en compte els errors de càlcul, sempre que l'argumentació sigui correcta.

B2.- Comproveu que la funció $f(x) = 7x - 10 - x^2$ té un màxim relatiu en $x = \frac{7}{2}$.

Solució: La primera derivada $f'(x) = 7 - 2x$ s'anul·la en $x = \frac{7}{2}$. A més, la segona derivada és $f''(x) = -2 < 0$, la qual cosa indica que es tracta d'un màxim. També es pot argumentar que la funció és una paràbola orientada negativament i vèrtex sobre $x = \frac{7}{2}$.

Puntuació: 0,5 per la condició de primer ordre i 0,5 punts per la condició suficient de màxim relatiu.

B3.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x) = 2e^{2x} - 3x^2$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = e^{2x} - x^3$ ja que $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands.

B4.- Calculeu i simplifiqueu la derivada de $f(x) = ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$.

Solució: $f'(x) = \frac{1}{\frac{2-x}{2+x}} \cdot \frac{-1(2+x)-(2-x)}{(2+x)^2} = \frac{-2-x-2+x}{(2-x)(2+x)} = \frac{-4}{(2-x)(2+x)} = \frac{4}{x^2-4}$.

Puntuació: 0,5 pel càlcul de la derivada i 0,5 punts per la simplificació. Considereu correcta qualsevol de les dues expressions finals de la derivada. També s'ha de considerar correcte qualsevol altre procediment que porti a una expressió equivalent.

B5.- Justifiqueu que, per a tots els valors de p, el sistema lineal
$\begin{cases} (1-p)x + (2+p)y = 3p \\ 2x - y = p \end{cases}$ sempre té solució.

Solució: Calculem el determinant de la matriu de coeficients del sistema
$det\begin{pmatrix} 1-p & 2+p \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -p-5$. Si $p \neq -5$ el sistema serà compatible determinat, i tindrà solució. En el cas $p = -5$ el sistema s'escriu $\begin{cases} 6x - 3y = -15 \\ 2x - y = -5 \end{cases}$. Observem que la primera equació és el triple de la segona (són equivalents); en conseqüència el sistema és compatible indeterminat.

Puntuació: 0,5 punts per l'estudi del sistema compatible determinat, i 0,5 punts pel cas del sistema compatible indeterminat.

Problema 1.-

L'empresa BonMoble fabrica calaixeres, taules i cadires, i dedica a aquesta tasca exactament 120 hores diàries.
Cada calaixera es ven a 400 € i necessita 4 hores de producció. En canvi, cada taula es ven a 200 € i requereix 2 hores de producció, les mateixes hores que cada cadira, que es ven a 50 €. A més, per cada taula produïda s'han de fabricar 4 cadires.
Determineu la producció que permet obtenir uns ingressos de 6 000 € diaris.

Solució.-
Representem per x, y, z, la producció diària de calaixeres, taules i cadires, respectivament.
La utilització de 120 hores de producció es formula com $4x + 2y + 2z = 120$.
Els ingressos de 6000 € s'escriuen com $400x + 200y + 50z = 6000$.
La condició de produir 4 cadires per cada taula la representem com $z = 4y$.
D'aquesta manera, es tracta de resoldre el sistema següent:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 120 \\ 400x + 200y + 50z = 6000 \\ -4y + z = 0 \end{cases}$$

Substituint en les dues primeres equacions $z = 4y$, el sistema és

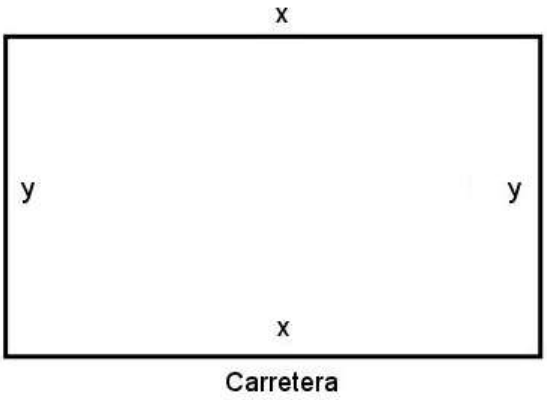
$$\begin{cases} 4x + 10y = 120 \\ 400x + 400y = 6000 \\ z = 4y \end{cases}$$

Multiplicant la primera equació per 100 i restant-li la segona equació es té que $600y = 6000$. Per tant, la solució consisteix en produir diàriament $x = 5$ calaixeres, $y = 10$ taules i $z = 40$ cadires.

Puntuació.- 2 punts pel plantejament correcte del sistema i 2 punts per la seva resolució. 1 punt si la solució obtinguda és coherent amb l'enunciat (per exemple, no es donen per vàlides solucions amb valors negatius de les incògnites o amb producció de taules superior a la producció de cadires). Penalitzeu amb 0,5 punts cas d'obtenir solucions amb valors negatius de les incògnites.

Problema 2.-

Un ramader vol instal·lar una tanca rectangular, amb un dels costats de la tanca tocant a una carretera recta. Per a fer-ho, disposa de 6 000 €. Cada metre de tanca instal·lada al costat de la carretera costa 15 €. Cada metre de tanca instal·lada en algun dels altres tres costats té un cost de 5 €.



Determineu les mides de la tanca que el ramader pot instal·lar amb el pressupost de 6 000 € i que circumscriu un rectangle d'àrea màxima.

Solució.-
El cost de la tanca és $5x + 15x + 5y + 5y = 20x + 10y = 6000$; simplificant i aïllant y es té $y = 600 - 2x$.

L'àrea del rectangle és $A = x \cdot y$; substituint el resultat anterior $A = f(x) = x \cdot (600 - 2x) = -2x^2 + 600x$; es tracta de trobar el valor x que maximitza aquesta funció.

La primera derivada $f'(x) = -4x + 600$ s'anul·la en el valor $x = 150$, i la segona derivada $f''(x) = -4$ és negativa, amb la qual cosa, la funció té un màxim en aquest punt.

Alternativament, es pot argumentar que la funció resulta ser una paràbola orientada negativament, amb el vèrtex en $x = 150$ (màxim de la funció).

Per tant, la tanca òptima tindrà 150 metres pel costat de la carretera i $y = 600 - 2 \cdot 150 = 300$ metres pel costat perpendicular a la carretera. L'àrea tancada màxima és de $A = 150 \cdot 300 = 45000$ metres quadrats.

Puntuació.- 2 punts pel plantejament del problema d'optimització i la construcció de la funció àrea. 3 punts per la resolució numèrica. Descompteu un punt si no es justifica que el punt trobat és màxim de la funció. Considereu la possibilitat de puntuar amb 0.5 punts aquells exercicis que, sense ser correctes, parteixin d'un esquema gràfic correcte. Considereu la possibilitat de puntuar amb fins a 2 punts aquells exercicis que, sense ser correctes, resolen un problema d'optimització.