Sèrie 3

Exercicis Opció A

A1.- Determineu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = (2x-1)\ln(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$.

Solució:
L'equació de la recta tangent és $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Calculem els coeficients d'aquesta equació:
$f(1) = 1 \cdot \ln(1) = 0$
$f'(x) = 2\ln(x) + \frac{2x-1}{x}$; $f'(1) = 2 \cdot \ln(1) + \frac{1}{1} = 1$.
L'equació resulta ser $y = 1 \cdot (x-1) + 0 = x - 1$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del pendent de la recta tangent i 0,5 punts per l'equació de la recta.

A2.- Escriviu una equació del pla que passa pels punts $P(1,0,1)$, $Q(0,1,0)$ i $R(0,-1,0)$.

Solució: Uns vectors directors són el vectors $u = \overrightarrow{QP} = (1,-1,1)$ i $v = \overrightarrow{RP} = (1,1,1)$.

El pla té equació $(x,y,z) = Q + \lambda v + \mu u = (0,1,0) + \lambda(1,1,1) + \mu(1,-1,1)$.

Alternativament, l'equació del pla es pot construir a partir de

$\det\begin{pmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$, és a dir, $x - z + y - 1 - z + x - y + 1 = \boxed{2x - 2z = 0}$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació dels vectors directors del pla i 0,5 punts per l'equació del pla. Penalitzeu amb 0,5 punts les errades greus en el càlcul del determinant.

A3.- Indiqueu una primitiva de la funció $f(x) = 3e^{-x} - 2x^{-3}$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = -3e^{-x} + x^{-2}$, perquè $F'(x) = f(x)$.

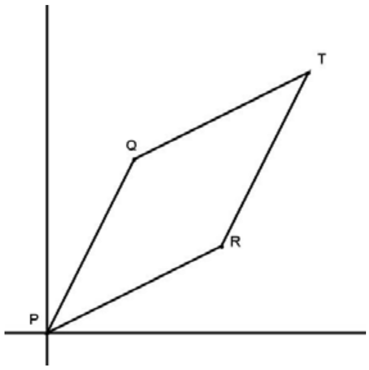
Puntuació: 0,5 punts per cadascun dels sumands expressat correctament.

A4.- Determineu el valor de a que fa que el sistema $\begin{cases} ax + y = a \\ 4x + 2y = a + 2 \end{cases}$ tingui infinites solucions.

Solució: El sistema ha de ser compatible indeterminat, per tant, la matriu del sistema ha de tenir determinant igual a zero: $det\begin{pmatrix} a & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2a - 4 = 0$. Amb $a = 2$ el sistema s'escriu $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 4x + 2y = 4 \end{cases}$; les equacions són equivalents i el sistema és compatible indeterminat (té infinites solucions).

Puntuació: 0,5 punts per la justificació i el càlcul del valor $a = 2$; 0,5 punts per la comprovació que el sistema es compatible indeterminat pel valor $a = 2$.

A5.- Considereu el paral·lelogram de vèrtexs $P(0,0), Q(1,2), R(2,1), T(x,y)$, en què el vèrtex T és oposat al vèrtex P. Determineu el vèrtex T i les longituds de les dues diagonals del paral·lelogram.



Solució: $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} = (1,2) + (2,1) = (3,3)$. El quart vèrtex té coordenades $T(3,3)$.
Les longituds de les diagonals són $\|\overrightarrow{PT}\| = \|(3,3)\| = 3\sqrt{2}$ i $\|\overrightarrow{QR}\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{2}$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del vèrtex i 0,25 punts pel càlcul de la longitud de cada diagonal.

Exercicis Opció B

B1.- Calculeu la distància entre els plans $\pi_1: x - 2y + z - 3 = 0$ i $\pi_2: -2x + 4y - 2z + 1 = 0$.

Solució: Els dos plans són paral·lels (els vectors normals $v_1 = (1,-2,1)$, $v_2 = (-2,\ 4,-2)$ són proporcionals). La distància entre els plans serà la distància entre un dels punts P del pla π_1 a l'altre pla π_2.
Fent $x = y = 0$ en l'equació de π_1, tenim que el punt $P = (0,0,3)$ és un punt d'aquest pla. La distància aleshores és

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_2) = \frac{|-2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{5}{\sqrt{24}}$$

Puntuació: 1 punt. No es considera necessària la comprovació de la posició relativa dels dos plans.

B2.- Justifiqueu que la funció $F(x) = ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$ és una primitiva de la funció $f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1}$.

Solució: Per les propietats del logaritme, sabem que $F(x) = ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = ln(2x-1) - ln(x+1)$; aleshores $F'(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1}$, i per tant, $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$.

Alternativament, $F'(x) = \frac{1}{\frac{2x-1}{x+1}} \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(2x-1)(x+1)}$. D'altra banda,

$f(x) = \frac{2}{2x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)-(2x-1)}{(2x-1)(x+1)} = \frac{3}{(2x-1)((x+1)}$, i $F'(x) = f(x)$, és a dir, $F(x)$ és una

primitiva de $f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre la primitiva i la funció, 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada. Considereu correctes els exercicis que, malgrat no arribar a la igualtat final, tinguin argumentacions i càlculs coherents.

B3.- Escriviu una equació de la recta que passa pel punt $P(0,0)$ i és paral·lela a la recta $r: 3x - y + 4 = 0$.

Solució: Les rectes paral·leles a r tenen per equació $3x - y + C = 0$. Substituint el punt $P(0,0)$, deduïm que $C = 0$, i la recta és $s: 3x - y = 0$.

Puntuació: 1 punt.

B4.- Determineu una equació de la recta r_1 que passa pels punts $P(-1,3)$ i $Q(1,1)$ i una de la recta r_2 que passa pels punts $Q(1,1)$ i $R(4,4)$.Justifiqueu que són dues rectes perpendiculars.

Solució: El vector director de r_1 és $v_1 = \overrightarrow{PQ} = (2,-2)$, i l'equació de la recta és $r_1: (x,y) = P + \lambda v_1 = (-1,3) + \lambda(2,-2)$.
El vector director de r_2 és $v_2 = \overrightarrow{QR} = (3,3)$, i l'equació de la recta és $r_2: (x,y) = Q + \lambda v_2 = (1,1) + \lambda(3,3)$.

Les rectes són perpendiculars, atès que el producte escalar dels seus vectors directors és nul: $v_1 \cdot v_2 = (2,-2) \cdot (3,3) = 0$.

Puntuació: 0,5 punts per les equacions de les rectes i 0,5 per justificar la seva perpendicularitat.

B5.- Justifiqueu que la funció $f(x) = 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 10x + 7$ té un màxim relatiu en $x = \frac{-5}{2}$.

Solució: S'ha de comprovar que la primera derivada s'anul·la en $x = \frac{-5}{2}$ i que la segona derivada en $x = \frac{-5}{2}$ és negativa.
$f'(x) = 6x^2 + 11x - 10 = 0$; en efecte, $f'\left(-\frac{5}{2}\right) = 6(-\frac{5}{2})^2 + 11(-\frac{5}{2}) - 10 = 0$. A més, $f''(x) = 12x + 11$, $f''\left(-\frac{5}{2}\right) = -19 < 0$.

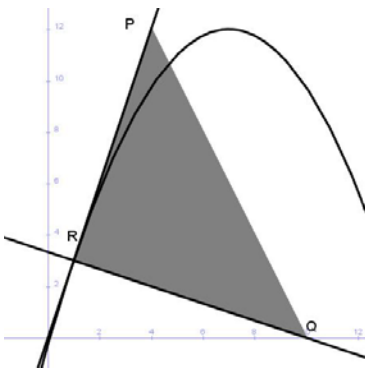
Puntuació: 0,5 punts pel càlcul de la primera derivada i comprovar que s'anul·la en el punt i 0,5 per la condició suficient d'optimalitat.

Problema 1.-

Considereu la funció $f(x) = \frac{-1}{4}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{4}$.

- ***a)*** Comproveu que r: $y = 3x$ és la recta tangent a $f(x)$ en $x = 1$.
- ***b)*** Justifiqueu que la recta s: $y = \frac{-1}{3}x + \frac{10}{3}$ és perpendicular a la recta r anterior.
- ***c)*** Comproveu que el punt $R(1,3)$ és el punt d'intersecció de les rectes r i s.
- ***d)*** Sabent que el punt $Q(10, 0)$ és un punt de la recta s i que el punt $P(4, 12)$ és un punt de la recta r, justifiqueu que el triangle de vèrtexs $R, P\ i\ Q$ és rectangle i isòsceles.

Solució.-



a) La derivada de la funció és $f'(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$; substituint $x = 1$ es té $f'(1) = 3$. D'altra banda, $f(1) = 3$. Així, la recta tangent és r: $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + 3 = 3x$.

b) Les rectes $r\ i\ s$ són perpendiculars perquè els seus pendents, $3\ i\ -\frac{1}{3}$, són inversos i oposats.

c) $R(1, 3)$ és la solució única del sistema $\begin{cases} y = 3x \\ y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \end{cases}$

d) En efecte, el triangle és rectangle, atès que les rectes r i s són perpendiculars. La longitud del catet $\overrightarrow{RQ}$ és $\|\overrightarrow{RQ}\| = \|(10, 0) - (1, 3)\| = \|(9, -3)\| = \sqrt{90}$.
La distància de $P(4, 12)$ a $R(1, 3)$ és $d(P, R) = \|\overrightarrow{PR}\| = \|(3, 9\| = \sqrt{90}$. El triangle és isòsceles.

Puntuació.- 1,5 punts per l'apartat **a)**, 1 punt per cadascun dels apartats **b)** i **c)**. 1,5 punts per l'apartat **d)**. Considereu la possibilitat de puntuar amb 0,5 aquells exercicis que, sense ser correctes, parteixin d'un esquema gràfic correcte.

Problema 2.-

Considereu les funcions $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 11$ i $g(x) = x^2 - 2x - 7$.

a) Comproveu que les dues funcions es tallen quan $x = 3$. Calculeu els altres punts d'intersecció de les dues funcions.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per les dues funcions des de $x = -2$ fins a $x = 3$.

Solució.-

a) Igualant les dues funcions es té
$x^3 - 3x^2 - 5x + 11 = x^2 - 2x - 7 \;\; \rightarrow \;\; x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$. Es pot aplicar Ruffini en el valor $x = 3$ i a continuació es resol l'equació de grau 2 resultant: $x^2 - x - 6$, la qual té solucions $x = 3, x = -2$.

Les funcions tenen dos punts de contacte el $(3, -4)$ i el $(-2,\ 1)$.

b) L'àrea resulta ser

$$A = \left| \int_{-2}^{3} [(x^3 - 3x^2 - 5x + 11) - (x^2 - 2x - 7)]dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-2}^{3} (x^3 - 4x^2 - 3x + 18)dx \right| = \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 18x \Big|_{-2}^{3} = \frac{625}{12}u^2.$$

Puntuació.- Apartat ***a)*** 1 punt cada punt d'intersecció trobat. Apartat ***b)***, 1.5 punts pel planteig correcte de la integral, 1 per trobar la primitiva i 0.5 per l'aplicació correcta de la regla de Barrow. Puntueu amb fins 1,5 punts el càlcul correcte d'una integral definida.