Sèrie 2

Exercicis Opció A

A1.- Considereu el polinomi $p(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$. Justifiqueu que $x = -1$ i $x = +2$ són dues arrels del polinomi. Determineu la tercera arrel del polinomi.

Solució:
Substituint els dos punts en el polinomi tenim
$p(-1) = -2 + 1 + 7 - 6 = 0$
$p(2) = 16 + 4 - 14 - 6 = 0$
Aplicant l'algorisme de Ruffini al polinomi de manera consecutiva amb les dues arrels conegudes, es té $p(x) = (x + 1)(x - 2)(2x + 3)$ i la tercera arrel és $x = -\frac{3}{2}$.

Puntuació: 0,5 punts per la justificació de les arrels i 0,5 punts pel càlcul de la tercera arrel.

A2.- Considereu les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & q \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} -2 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculeu els valors de p i q de manera que el producte d'aquestes matrius sigui la matriu $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solució: No és possible realitzar el producte $A \cdot B$ però sí el producte $B \cdot A$.
Aleshores: $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 2p & 3p & 2 + p \cdot q \\ 2 & 3 & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, i els valors adequats són $p = 1,\ q = 0$.

Puntuació: 0,5 punts per multiplicar les matrius en l'ordre correcte i 0,5 punts per la determinació correcta dels paràmetres.

A3.- Justifiqueu que la funció $f(x) = x^2 e^x$ és decreixent en l'interval $(-2, 0)$.

Solució: Es tracta de comprovar que la derivada és negativa en l'interval.
$f'(x) = (x^2 + 2x)e^x$. L'exponencial és sempre positiva. La paràbola $x^2 + 2x = x(x + 2)$ està orientada positivament, i pren valors negatius en l'interval $(-2, 0)$.

Puntuació: 0,5 punts pel càlcul de la derivada i la relació entre decreixement i signe de la derivada. 0,5 punts per la justificació del signe.

A4.- Determineu una equació del pla que passa pel punt $P(0,1,1)$ i és paral·lel a les rectes $r_1: \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{2}$ i $r_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$.

Solució: Es tracta del pla d'equació $(x, y, z) = (0,1,1) + \lambda(2,1,2) + \mu(2,2,2)$.
També és possible determinar el pla com
$det\begin{pmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = -2x + 2z - 2 = 0$.

Puntuació: 1 punt. Penalitzeu amb 0,5 punts les errades greus en el càlcul del determinant.

A5.- Escriviu una primitiva de la funció $f(x) = 3x^4 + \frac{e^{2x}}{3}$.

Solució:
$F(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{e^{2x}}{6}$, perquè $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 0,5 punts per cada sumand correcte de la primitiva.

Exercicis Opció B

B1.- Determineu el domini de la funció $f(x) = \sqrt{8x - x^2 - 12}$.

Solució: El domini és el conjunt de valors pels quals $8x - x^2 - 12 \geq 0$. Es tracta d'una paràbola orientada negativament, amb arrels $x = 2, x = 6$. Per tant, el domini de la funció és l'interval $[2,6]$.

Puntuació: 0,25 punts per l'argumentació del domini de l'arrel quadrada, 0,25 punts per la determinació de les arrels del polinomi i 0,5 punts per la determinació correcta de l'interval.

B2.- Determineu el valor de p que fa que la matriu $\begin{pmatrix} 3 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ sigui la matriu inversa de la matriu $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ p & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

Solució: El producte de les matrius ha de ser la matriu identitat d'ordre 2:

$$\begin{pmatrix} 3 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ p & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & \frac{3}{2} - \frac{3p}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ p & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & p \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3p-3 & p^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

L'únic valor possible és $p = 1$.

Puntuació: 0,5 pel càlcul d'un dels dos productes de matrius, i 0,5 punts per la determinació del valor de p.

B3.- Escriviu una equació de la recta que passa pel punt $P(-1,1)$ i és perpendicular a la recta $r: 2x + 3y - 5 = 0$.

Solució: La recta perpendicular a r té equació $s: 3x - 2y + C = 0$. El valor C es dedueix substituint el punt P en aquesta equació:
$3x - 2y + C = 3(-1) - 2(1) + C = 0$, d'on $C = 5$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del pendent de la recta perpendicular i 0,5 punts per la determinació de C.

B4.- Justifiqueu que el triangle de vèrtexs $P(1,2), Q(2,4)\ i\ \ R(2,0)$ és isòsceles.

Solució: Calculem les distàncies entre els vèrtexs (longituds dels costats del triangle):

$d(P,Q) = \|P - Q\| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{5}$
$d(P,R) = \|P - R\| = \sqrt{(1-2)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{5}$
$d(R,Q) = \|R - Q\| = \sqrt{(2-2)^2 + (0-4)^2} = 4$

Es tracta doncs d'un triangle isòsceles.

Puntuació: 1 punt.

B5.- Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $f(x) = (x+1)e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $a = 0$.

Solució:
L'equació de la recta tangent és $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ Calculem els coeficients d'aquesta equació:
$f(a) = f(0) = 1 \cdot e^0 = 1$
$f'(x) = e^{-2x} + (x+1)e^{-2x}(-2); f'(a) = f'(0) = e^0 + (1)e^0(-2) = 1 - 2 = -1.$
L'equació resulta ser $y = -1 \cdot (x-0) + 1 = -x + 1$.

Puntuació: 0,5 punts per la determinació del pendent de la recta tangent i 0,5 punts per l'equació de la recta.

Problema 1.-

1.- L'empresa OILCO produeix tres tipus de carburants, x, y, z, barrejant petroli procedent de Veneçuela, Aràbia Saudí i la mar del Nord. La taula següent mostra les tones de cada tipus de petroli utilitzat en l'elaboració d'un barril de cada tipus de carburant.

	Carburant x	Carburant y	Carburant z
Petroli de Veneçuela	40	30	35
Petroli d'Aràbia Saudí	30	40	35
Petroli de la mar del Nord	30	30	30

Cada dia, OILCO utilitza exactament 2 500 tones de petroli veneçolà i 3 100 tones d'aràbic. A més, el preu de venda de cada barril de carburant x, y, z és, respectivament, 36 €, 30 € i 35 € per barril, i s'obtenen uns ingressos diaris de 2 468 €.

a) Determineu la producció diària dels diferents tipus de carburants.
b) Calculeu la quantitat de petroli de la mar del Nord necessària diàriament.

Solució.-

a) Anomenem x, y, z els barrils de carburant produïts diàriament. Aleshores tenim el sistema d'equacions lineals següent:

$$\begin{cases} 40x + 30y + 35z = 2500 \\ 30x + 40y + 35z = 3100 \\ 36x + 30y + 35z = 2468 \end{cases}$$

Restant la primera equació de la segona i la tercera de la segona equació, es té

$$\begin{cases} -10x + 10y = 600 \\ -6x + 10y = 632 \end{cases}$$

Tornant a restar les dues equacions, $4x = 32$, d'on $x = 8$. Substituint en la segona equació del sistema anterior $-6x + 10y = -48 + 10y = 632$, d'on es dedueix $y = 68$. Finalment, utilitzant la primera equació del primer sistema es té $40x + 30y + 35z = 320 + 2040 + 35z = 2500$, i es té $z = 4$.

La solució única és $\boxed{x = 8,\ y = 68,\ z = 4}$ barrils de cada carburant.

b) Per determinar la quantitat de cru del Mar del Nord necessari per aquesta producció substituïm la solució en l'expressió
$30x + 30y + 30z = 30 \cdot (8 + 68 + 4) = 2400$ tones.

Puntuació.- Apartat ***a)***, 2 punts per plantejar correctament el sistema i 2 punts per la solució. Apartat ***b)***, 1 punt per determinar la quantitat de cru del Mar del Nord utilitzada. Considereu la possibilitat de puntuar amb 2 punts aquells exercicis que, sense ser correctes, resolen els sistemes d'equacions adequadament i obtenen solucions coherents (per exemple, sense valors negatius en la producció).

Problema 2.-

Considereu les funcions $f(x) = 5x^2 - 13x - 46$ i $g(x) = -3x^2 + 3x + 18$.

a) Determineu els punts d'intersecció de les dues funcions.

b) Calculeu l'àrea de la regió limitada per les dues funcions des de $x = -2$ fins a $x = 4$.

Solució.-

a) Igualant les dues funcions es té
$5x^2 - 13x - 46 = -3x^2 + 3x + 18 \;\rightarrow\; 8x^2 - 16x - 64 = 0$. L'equació de grau 2 resultant té solucions $x = -2,\ x = 4$.
Les funcions es tallen en dos punts: el punt $(-2,\ 0)$ i el $(4,\ -18)$.

b) L'àrea resulta ser

$$A = \left| \int_{-2}^{4} [(-3x^2 + 3x + 18) - (5x^2 - 13x - 46)]dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-2}^{4} (-8x^2 + 16x + 64)dx \right| = \frac{-8x^3}{3} + 8x^2 + 64x \Big|_{-2}^{4} = 288u^2.$$

Puntuació.- Apartat ***a)*** 1 punt cada punt d'intersecció trobat. Apartat ***b)***, 1.5 punts pel planteig correcte de la integral, 1 per trobar la primitiva i 0.5 per l'aplicació correcta de la regla de Barrow. Considereu la possibilitat de valorar amb fins a 1,5 punts els exercicis amb un càlcul adequat d'una integral definida.