Sèrie 3

Exercicis Opció A

A1.- Simplifiqueu l'expressió $\frac{4x+2}{x^2-1} - \frac{3}{x-1}$.

Solució: $\frac{4x+2}{x^2-1} - \frac{3}{x-1} = \frac{4x+2-3x-3}{x^2-1} = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$.

Puntuació: 1 punt.

A2.- Determineu el rang de la matriu $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ en funció dels valors de x.

Solució: Les dues files de la matriu són iguals. Per tant, el rang de la matriu és igual a 1 si $x \neq 0$ i 0 si $x = 0$.

Puntuació: 0,5 pel cas $x \neq 0$ i 0,5 pel cas $x = 0$.

A3.- Comproveu que la funció $f(x) = x^2 - 4x$ té un mínim relatiu quan $x = 2$.

Solució: $f'(x) = 2x - 4$, que s'anul·la quan $x = 2$. A més a més, $f''(x) = 2 > 0$ que indica que es tracta d'un mínim.
També és pot considerar correcte dir que es tracta d'una paràbola d'eix vertical, orientada positivament i amb vèrtex sobre $x = 2$.

Puntuació: 0,5 punts per la derivada primera i comprovar que s'anul·la per $x = 2$. 0,5 per determinar que es tracta d'un mínim. Si s'utilitzen altres argumentacions 1 punt.

A4.- Escriviu l'equació de la recta paral·lela a la recta $x - 2y + 1 = 0$ que passa pel punt $(-2,1)$.

Solució: $(x + 2) - 2(y - 1) = 0$.

Puntuació: 1 punt. Compteu 0,5 si el resultat conté un element de direcció correcte (pendent, vector normal, etc.) encara que l'equació no ho sigui.

A5.- Trobeu l'àrea d'un triangle de 2 m de base i amb angles 30^o, 60^o i 90^o, en què l'angle de 30^o és l'oposat a la base.

Solució: Donat que es tracta d'un triangle rectangle i usant la definició de tangent,

$$\tan 60^o = \frac{h}{2} \quad \to \quad h = 2\sqrt{3}\, m$$

on h és l'altre catet i, per tant, l'altura. Llavors

$$A = \frac{1}{2} 2 \cdot 2\sqrt{3}\, m^2 = 2\sqrt{3}\, m^2.$$

Puntuació: 0.5 pel càlcul de l'altura i 0.5 pel càlcul de l'àrea..

Exercicis Opció B

B1.- Resoleu $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$

Solució: Si es fa el canvi $z = 2^x$, s'obté l'equació de segon grau $z^2 - 3z + 2 = 0$, que té per solucions $z = 1,\ z = 2$. Llavors

$$z = 1 \ \rightarrow\ 2^x = 1 \ \rightarrow\ x = 0 \quad i \quad z = 2 \ \rightarrow\ 2^x = 2 \ \rightarrow\ x = 1.$$

Puntuació: 0,5 punts per resoldre l'equació de segon grau correcta, ja sigui fent un canvi de variable o usant directament 2^x. 0,5 punts per la determinació dels valors de x (0,25 cada valor).

B2.- Trobeu p si la solució del sistema $\begin{cases} x - 2y = -1 \\ px - 3y = 1 \end{cases}$ és $x = y = 1$.

Solució: És suficient substituir la solució dins del sistema.

$$\begin{cases} 1 - 2 = -1 \\ p - 3 = 1 \end{cases} \ \rightarrow\ p = 4.$$

Puntuació: 1 punt.

B3.- Calculeu una primitiva de la funció $f(x) = e^{5x+1}$.

Solució: Una primitiva és $F(x) = e^{5x+1}/5$ ja que $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 1 punt.

B4.- Comproveu que la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$ és perpendicular al pla d'equació $4x + 6y - 2z + 1 = 0$.

Solució: Un vector director de la recta és el $(2,3,-1)$, i un vector normal al pla és el $(4,6,-2)$. Com que el segon vector és el doble del primer, són paral·lels i la recta és perpendicular al pla.

Puntuació: 0,5 per identificar els elements de direcció de la recta i del pla. 0,5 per argumentar correctament la condició de perpendicularitat.

B5.- Indiqueu quin és el domini de la funció $f(x) = \sqrt{x-1}$.

Solució: Com que el radicand no pot ser negatiu s'ha de complir que

$$x - 1 \geq 0 \ \rightarrow\ x \geq 1 \ \rightarrow\ Dom(f) = [1, \infty).$$

Puntuació: 1 punt.

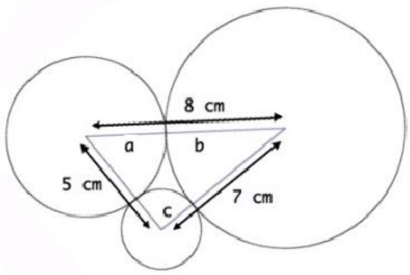
Problema 1.- Tres circumferències estan centrades en els vèrtexs d'un triangle els costats del qual fan 5, 7 i 8 centímetres. A més a més, cada circumferència és tangent a les altres dues.

a) Feu un dibuix o esquema gràfic corresponent a la situació descrita en l'enunciat.

b) Calculeu els radis de les tres circumferències.

Solució.-

a) Si a, b i c representen els radis, un possible dibuix seria



b) Seguint la notació del dibuix $\begin{cases} a+b=8 \\ a+c=5. \\ b+c=7 \end{cases}$

De la primera $b=8-a$ i de la segona $c=5-a$. Substituint dins de la tercera $8-a+5-a=7 \ \rightarrow \ 2a=6 \ \rightarrow \ a=3\ cm,\ b=5\ cm,\ c=2cm.$

Puntuació.- 2 punts per l'apartat ***a)***. Evidentment, no cal exigir un dibuix a escala. És suficient que les circumferències tinguin els centres sobre els vèrtexs, aproximadament, i que siguin tangents cada dues. A l'apartat ***b)*** 1 punt per plantejar correctament el sistema i 2 punts per la seva resolució.

Problema 2.- Considereu les paràboles d'equacions $y=4-x^2$ i $y=-2x^2+2x+3$.

a) Comproveu que només tenen un punt d'intersecció i que, en aquest punt, totes dues tenen la mateixa recta tangent.

b) Calculeu l'àrea tancada entre les dues paràboles des de $x=1$ fins a $x=3$.

Solució.-

a) Resolent el sistema format per les dues equacions es comprova que la solució és única.

$$4-x^2=-2x^2+2x+3 \ \rightarrow \ x^2-2x+1=0 \ \rightarrow \ (x-1)^2=0 \ \rightarrow \ x=1.$$

Les dues paràboles tenen un únic punt de contacte en el $(1{,}3)$.

Derivant $y=4-x^2 \ \rightarrow \ y'=-2x$ i $y=-2x^2+2x+3 \ \rightarrow \ y'=-4x+2.$

Es comprova que quan $x=1$ les dues derivades valen -2 i, per tant, les dues paràboles comparteixen la mateixa recta tangent en el punt d'intersecció. L'equació d'aquesta recta es pot escriure com $y-3=-2(x-1)$.

b)

$$A = \left|\int_1^3 (4 - x^2 + 2x^2 - 2x - 3)\,dx\right| = \left|\int_1^3 (x^2 - 2x + 1)\,dx\right| = \frac{x^3}{3} - x^2 + x\Big|_1^3 = \frac{8}{3}u^2.$$

Puntuació.- Apartat ***a)***, 1 punt per trobar el punt d'intersecció, 1 punt per comprovar que la tangent és comuna i 1 punt per l'equació de la tangent. Apartat ***b)***, 1 punt pel planteig correcte de la integral, 0.5 per trobar la primitiva i 0.5 per l'aplicació correcta de la regla de Barrow. Considereu la possibilitat de puntuar amb 0.5 aquells exercicis que, sense ser correctes, parteixin d'un esquema gràfic correcte.