Sèrie 3

Opció A

A1.- Digueu de quin tipus és la progressió numèrica següent i calculeu la suma dels seus termes

$$3, 6, 12, 24, \ldots, 3072.$$

Solució:
La progressió és geomètrica de raó 2 ja que cada terme s'obté multiplicant l'anterior per aquest valor.

$$3 + 6 + 12 + 24 + \ldots + 3072 = \frac{2 \cdot 3072 - 3}{2 - 1} = 6141.$$

Puntuació: 0.25 per indicar el tipus de la progressió i 0.75 per calcular la seva suma. Si algun estudiant fa la suma terme a terme compteu zero.

A2.- Calculeu els valors de *k* que impedeixen que el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = -1 \\ kx + y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ sigui compatible i determinat.

Solució:
Una possibilitat és buscar els valors de *k* que anul·len el determinant de la matriu de coeficients.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & k \\ k & 1 & 2 \end{vmatrix} = k^2 - 3k + 2 = 0 \;\rightarrow\; k = 1, k = 2.$$

Puntuació: 1 punt. La valoració de les errades de càlcul queda a criteri del corrector.

A3.- Simplifiqueu l'expressió trigonomètrica $(\cos x - \cos^3 x) \cdot \operatorname{cosec}^2 x$.

Solució:

$$(\cos x - \cos^3 x) \cdot \operatorname{cosec}^2 x = \cos x (1 - \cos^2 x) \frac{1}{\sin^2 x} = \cos x \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = \cos x.$$

Puntuació: 1 punt.

A4.- Resoleu l'equació $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$.

Solució:
Fent $z = e^x$, es compleix que $e^{2x} = z^2$ i l'equació de l'enunciat es transforma en una de segon grau $z^2 - 2z - 3 = 0.$ Les solucions són $z = 3, z = -1.$ La primera proporciona $e^x = 3,$ és a dir $x = \ln 3.$ Evidentment cal rebutjar la segona ja que $e^x = -1$ no té solució.

Puntuació: 0.5 per arribar a l'equació de segon grau i resoldre-la tant si es fa el canvi de variable com si no. 0.25 per l'obtenció de la solució real de *x*. 0.25 per rebutjar explícitament la solució $e^x = -1$.

A5.- Comproveu que la funció

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

té un màxim relatiu quan $x = 2$.

Solució:
Primerament es calcula la derivada de la funció i es comprova que s'anul·la quan $x = 2$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3} \rightarrow f'(2) = 0.$$

Ara falta veure que es tracta d'un màxim. Es fàcil comprovar que immediatament a la dreta de $x = 2$ la derivada és negativa i a l'esquerra positiva. Això significa que la funció passa de creixement a decreixement i, per tant, a $x = 2$ hi ha un màxim.
També es pot fer veient que el signe de la derivada segona és negatiu.

$$f''(x) = \frac{2x-6}{x^4} \rightarrow f''(2) = \frac{4-6}{16} < 0.$$

Puntuació: 0.5 punts pel càlcul correcte de la derivada i 0.25 per comprovar que la derivada primera s'anul·la i 0.25 per veure que es compleix la condició suficient de màxim relatiu.

Opció B

B1.- Opereu i simplifiqueu

$$2 - \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}.$$

Solució:

$$2 - \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \frac{2x^2 - 2 - 2x^2 - x + 3}{x^2 - 1} = \frac{1-x}{(x-1)(x+1)} = -\frac{1}{x+1}.$$

Puntuació: 1 punt.

B2.- Trobeu els angles d'un triangle isòsceles sabent que la seva àrea és $10cm^2$ i que l'altura perpendicular al costat desigual té una longitud de $5cm$.

Solució:
Com que es coneixen l'àrea i l'altura, es pot calcular la longitud de la base, que en aquest cas és el costat desigual.

$$\frac{5 \cdot b}{2} = 10 \rightarrow b = 4cm.$$

Agafant l'altura donada com a eix de simetria i considerant només la meitat del triangle s'obté un triangle rectangle de catets de longitud 5*cm* i 2*cm*. Llavors, el valor dels angles iguals s'obté de fer

$$A = \arctan\frac{5}{2} = 68,2^{o}$$

I l'angle desigual val $B = 180^o - 2 \cdot 68,2^o = 43,6^o$.
Puntuació: Per respondre correctament aquesta qüestió és suficient donar com a resultat l'angle desigual i el valor dels angles iguals. Puntueu 0.25 per determinar la base del triangle, 0.5 per trobar algun dels angles i 0.25 per dir quin és el valor que falta. Penalitzeu 0.5 si es limiten a treballar amb el triangle rectangle resultant de dividir el triangle de l'enunciat en dues meitats simètriques.

B3.- Trobeu l'equació de la recta paral·lela a la recta d'equació $y = 2x - 3$ que passa pel punt $(3, -2)$.

Solució:
L'equació demanada es pot obtenir fent
$y + 2 = 2(x - 3) \;\rightarrow\; y = 2x - 8.$

Puntuació: 1 punt.

B4.- Resoleu l'equació $\log_2 x^2 = 4$.

Solució:
$\log_2 x^2 = 4 \;\rightarrow\; 2^4 = x^2 \;\rightarrow\; x = \pm 4.$

Puntuació: 1 punt.

B5.- Calculeu una primitiva de la funció $f(x) = \sin 5x$.

Solució:
La primitiva demanada pot ser $F(x) = -\cos 5x/5$ ja que $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 1punt.

PROBLEMES

Problema 1.- Considereu les dues parelles de rectes

$$\begin{matrix} r_1: x+y-2=0 \\ r_2: x+y-8=0 \end{matrix} \quad \text{i} \quad \begin{matrix} r_3: x-5y-2=0 \\ r_4: 2x-y+2=0 \end{matrix}.$$

Calculeu les coordenades dels punts de tall de les rectes de la primera parella amb cada una de les rectes de la segona.

Els punts obtinguts són els vèrtexs d'un trapezi, calculeu-ne l'àrea.

Solució:
Punts d'intersecció.

$$r_1 - r_3 \quad \left.\begin{matrix} x+y-2=0 \\ x-5y-2=0 \end{matrix}\right\} \to x+y-2 = x-5y-2 \to y=0,\ x=2 \to A(2,0).$$

$$r_1 - r_4 \quad \left.\begin{matrix} x+y-2=0 \\ 2x-y+2=0 \end{matrix}\right\} \textit{sumant les equacions} \to x=0,\ y=2 \to B(0,2).$$

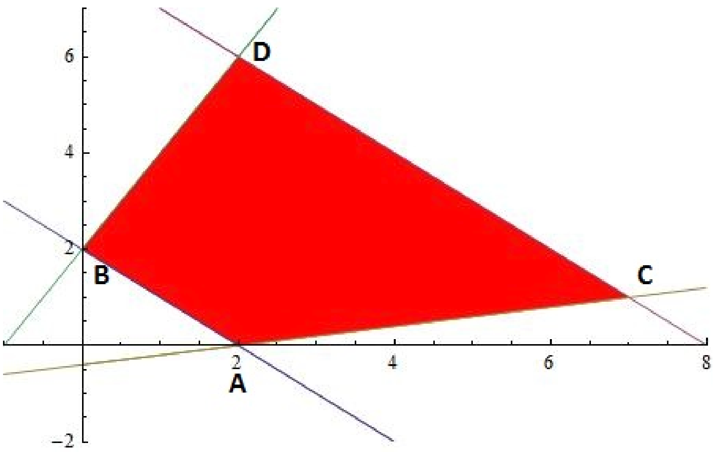
$r_2 - r_3$

$$\left.\begin{matrix} x+y-8=0 \\ x-5y-2=0 \end{matrix}\right\} \to x+y-8 = x-5y-2 \to 6y=6 \to y=1,\ x=7 \to C(7,1).$$

$r_2 - r_4$

$$\left.\begin{matrix} x+y-8=0 \\ 2x-y+2=0 \end{matrix}\right\} \textit{sumant les equacions} \to 3x=6 \to x=2,$$

$$y=6 \to D(2,6).$$



Les longituds de les bases són

$$\overline{AB} = \|(0,2)-(2,0)\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$$\overline{CD} = \|(2,6)-(7,1)\| = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}.$$

L'altura del trapezi es pot obtenir, per exemple, calculant la distància del punt *A* a la recta *r*2,

$$h = \left|\frac{2+0-8}{\sqrt{1+1}}\right| = \frac{6}{\sqrt{2}}.$$

Finalment, es calcula l'àrea,

$$\grave{A}rea = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \cdot h = 21u^2.$$

Puntuació: 0.5 punts per cada punt d'intersecció, 0.5 pel càlcul de la longitud de cada base, 1 punt pel càlcul de l'altura i 1 punt pel càlcul de l'àrea. Total 5 punts.

Problema 2.- Calculeu l'àrea tancada per la corba d'equació $y = x^3 - 4x$ i la recta tangent a aquesta corba en el punt d'abscissa $x = 1$.

Solució:
En primer lloc cal trobar l'equació de la recta tangent. L'ordenada del punt de tangència és $y = 1 - 4 = -3$ i les coordenades d'aquest punt són $(1, -3)$.

Calculant la derivada, $y' = 3x^2 - 4$, i el seu valor en el punt de tangència, $m = 3 - 4 = -1$, es construeix l'equació

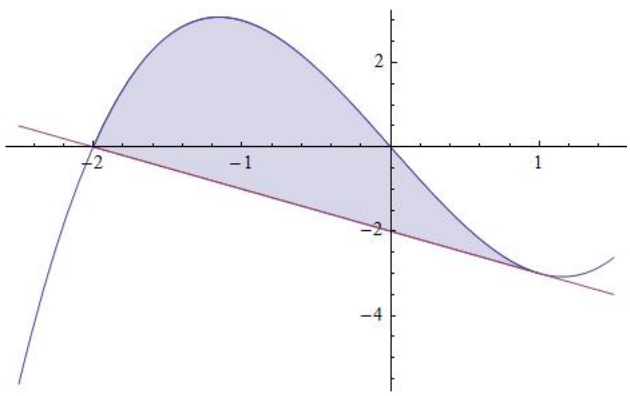
$$y + 3 = -(x - 1) \;\rightarrow\; y = -x - 2.$$

A continuació cal veure quin és el recinte determinat per la corba i la recta tangent. Si es calculen els punts d'intersecció,

$$x^3 - 4x = -x - 2 \;\rightarrow\; x^3 - 3x + 2 = 0,$$

i les solucions són $x = 1$ doble, què és el punt de tangència, i $x = -2$. Es comprova fàcilment que, per tot punt de l'interval $[-2,1]$, la corba queda per sobre de la recta i la seva àrea es calcula fent

$$A = \int_{-2}^{1} (x^3 - 4x - (-x - 2))dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\Big|_{-2}^{1}$$
$$= \frac{27}{4}u^2.$$



Puntuació:
De la recta tangent: 0.5 punts per la determinació del punt de tangència, 0.5 per calcular la derivada correctament, 0.5 per calcular el pendent i 0.5 per l'equació.
Del càlcul de l'àrea: 1.5 per arribar correctament a la integral que s'ha de calcular, 1 punt pel càlcul de la primitiva i 0.5 per l'aplicació correcta de la regla de Barrow.