Sèrie 2

Opció A

A1.- Calculeu el residu de la divisió $(x^4 - 2x^3 + 2x + 5):(x-2)$.

Solució:
El càlcul es pot fer fent la divisió pel mètode tradicional o usant l'algorisme de Ruffini. De tota manera, és suficient substituir $x = 2$ dins del polinomi del dividend i s'obté el valor 9.

Puntuació: 1punt.

A2.- Els costats d'un triangle equilàter tenen una longitud de 6*cm*. Calculeu l'àrea del triangle.

Solució:
Si es divideix el triangle equilàter segons qualsevol eix de simetria s'obté un triangle rectangle on un dels catets té 3*cm* de longitud, la hipotenusa, que és un dels costats del triangle equilàter, és de 6*cm* i l'angle comprès de 60^o. Llavors, l'altura del triangle de l'enunciat, que no és més que el catet que falta trobar en el triangle rectangle val $h = 6\sin 60^o = 3\sqrt{3}cm$.

Finalment, l'àrea del triangle és

$$A = \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}cm^2.$$

Evidentment, el càlcul de l'altura també es pot fer usant el Teorema de Pitàgores.

Puntuació: 0.5 punts per la determinació de la base i de l'altura. 0.5 pel càlcul de l'àrea.

A3.- Trobeu l'equació de la recta perpendicular a $y = -x + 3$ que passa pel punt $(-3,2)$.

Solució:
Si el pendent de certa recta és *m*, el de qualsevol recta perpendicular a ella és $-\frac{1}{m}$. Llavors, l'equació de la recta demanada és pot escriure com

$$y - 2 = 1 \cdot (x+3) \ \rightarrow \ y = x + 5.$$

També es pot trobar a partir de l'equació general de la recta donada $x + y - 3 = 0$. Un vector normal és el $(1,1)$. Un vector perpendicular a aquest pot ser el $(1,-1)$ i l'equació que es demana és $(x+3) - (y-2) = 0 \ \rightarrow \ x - y + 5 = 0$.

Puntuació: 0.5 punts per determinar l'element de direcció (pendent o vector) de la recta perpendicular. 0.5 per escriure l'equació correctament.

A4.- Calculeu el valor de x positiu que compleixi $\log_x 2 = 4$.

Solució: De la definició de logaritme,
$x^4 = 2 \ \rightarrow \ x = \sqrt[4]{2}$.

Puntuació: 1 punt.

A5.- Comproveu que la funció $f(x) = e^x \sin x$ creix quan $x = 0.$

Solució:
La derivada de la funció és

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x \;\rightarrow\; f'(0) = 1 > 0.$$

Quan $x = 0$ la derivada és positiva, això significa que la funció és creixent en aquest punt.

Puntuació: 0.5 punts pel càlcul correcte de la derivada i 0.5 per comprovar el sentit de la variació.

Opció B

B1.- Calculeu la matriu inversa de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Solució:

Com que el determinant de A val +1, és suficient transposar i adjuntar la matriu. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = (A^T)^{adj} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Es clar que la matriu inversa es pot calcular d'altres maneres com, per exemple, usant el mètode de Gauss o plantejant i resolent un sistema d'equacions lineals.

Puntuació: 1punt. Queda a criteri del corrector la valoració de les errades de càlcul.

B2.- Determineu si algun valor de *p* fa que el sistema

$$\left.\begin{aligned} 2x + y &= -1 \\ x + \frac{p^2}{2}y &= p \end{aligned}\right\}$$

tingui infinites solucions.

Solució:

Primerament es busquen els valors de *p* que anul·len el determinant de la matriu de coeficients.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{p^2}{2} \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; p^2 - 1 = 0 \;\rightarrow\; p = \pm 1.$$

Quan $p = \pm 1$, la matriu ampliada és $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1/2 & \pm 1 \end{pmatrix}$ que té rang 2 en tots dos casos. Per tant, sigui quin sigui el valor de *p*, el sistema, o és compatible i determinat, o és incompatible però en cap cas pot tenir infinites solucions.

Puntuació: 0.5 punts per trobar els valors del paràmetre que discriminen i 0.5 per justificar que el sistema no pot ser indeterminat.

B3.- Simplifiqueu l'expressió trigonomètrica

$$\frac{\cos x}{\tan x(1-\sin x)}.$$

Solució:

$$\frac{\cos x}{\tan x(1-\sin x)} = \frac{(\cos x)^2}{\sin x(1-\sin x)} = \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{\sin x\,(1-\sin x)}$$
$$= \frac{(1+\sin x)}{\sin x} = \operatorname{cosec} x + 1.$$

Puntuació: 1punt. Doneu per bona qualsevol de les dues últimes expressions. Queda a criteri del corrector la penalització de les errades.

B4.- Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta d'equació

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{-12}$$

que passa per l'origen de coordenades.

Solució:
El vector director de la recta, $(2,3,-12)$, serveix com a vector normal al pla. Tenint en compte que el pla ha de passar per l'origen de coordenades, l'equació demanada es pot escriure com $2x+3y-12z=0$.

Puntuació: 1 punt.

B5.- Calculeu una primitiva de la funció $f(x)=e^{-3x}$.

Solució:
La primitiva demanada pot ser

$$F(x) = -\frac{e^{-3x}}{3}$$

ja que $F'(x)=f(x)$.

Puntuació: 1 punt.

PROBLEMES.-

Problema 1.- El responsable d'un supermercat rep de les caixes un sobre amb 191 bitllets de 5€, 10€ i 20€ per un import total de 1500€. Curiosament, si tots els bitllets de 5€ fossin de 20€ i tots els de 20€ fossin de 5€, l'import total seria el doble. Determineu quants bitllets hi ha de cada tipus dins del sobre.

Solució:
Siguin *x*, *y* i *z* la quantitat de bitllets de 5€, 10€ i 20€ respectivament. De l'enunciat se'n dedueix el sistema d'equacions lineal

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=191 \\ 5x+10y+20z=1500 \\ 20x+10y+5z=3000 \end{array}\right\}.$$

Si es divideixen les equacions segona i tercera entre 5 el sistema queda com

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=191 \\ x+2y+4z=300 \\ 4x+2y+z=600 \end{array}\right\}.$$

De la resta de la tercera menys la segona s'obté $3x-3z=300 \ \rightarrow \ x=100+z$ que substituït dins la primera proporciona $100+z+y+z=191 \ \rightarrow \ y=91-2z$.

Finalment, deixant la segona equació en funció de z,
$100+z+182-4z+4z=300 \ \rightarrow \ z=18,$
i, llavors, $x=118$ i $y=55$.

Puntuació: 2 punts per la construcció d'un sistema d'equacions lineal coherent amb l'enunciat. 3 punts per la seva resolució. Total 5 punts.

Problema 2.- Considereu la funció $f(x) = (x^2 - 3)e^x$. Trobeu les abscisses dels seus extrems relatius i classifiqueu-les. Comproveu que $x = \sqrt{5} - 2$ és l'abscissa d'un punt d'inflexió.

Solució:
La derivada de la funció donada és

$$f'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x = (x^2 + 2x - 3)e^x.$$

Resolent $f'(x) = 0 \ \rightarrow \ x^2 + 2x - 3 = 0$, s'obtenen les solucions $x = 1$ i $x = -3$.

Tot i que es podrien classificar observant el signe de la derivada a dreta i esquerra de cada solució, val la pena fer-ho amb la derivada segona ja que després també farà falta.

$$f''(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - 3)e^x = (x^2 + 4x - 1)e^x.$$
$$f''(1) = (1 + 4 - 1)e = 4e > 0 \ \rightarrow \ \text{MÍNIM.}$$
$$f''(-3) = (9 - 12 - 1)e^{-3} < 0 \ \rightarrow \ \text{MÀXIM.}$$

La derivada tercera és igual a

$$f'''(x) = (2x + 4)e^x + (x^2 + 4x - 1)e^x = (x^2 + 6x + 3)e^x.$$

Donat que $f''(\sqrt{5} - 2) = (5 - 4\sqrt{5} + 4 + 4\sqrt{5} - 8 - 1)e^{\sqrt{5}-2} = 0$ i que
$f'''(\sqrt{5} - 2) = (5 - 4\sqrt{5} + 4 + 6\sqrt{5} - 12 + 3)e^{\sqrt{5}-2} \neq 0,$

Es pot afirmar que en el punt d'abscissa $x = \sqrt{5} - 2$ hi ha un punt d'inflexió.

Puntuació: 0.5 punts pel càlcul correcte de la derivada primera, 0.5 pel de la segona. 1 punt per trobar els valors que anul·len la derivada primera. 1 punt per la seva classificació. 1 punt per comprovar que $x = \sqrt{5} - 2$ anul·la la derivada segona i 1 punt per comprovar d'alguna forma correcta que correspon a un punt d'inflexió. Tingueu en compte que en cap moment es demana obtenir les ordenades dels punts. Total 5 punts.