



SÈRIE 3

Part 1

[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

Q1.

SOLUCIÓ:

El domini de la funció $f(x)$ és el conjunt de valors que verifiquen simultàniament les dues desigualtats següents:

$$x+1 \geq 0$$

$$2-x > 0$$

Per tant, el domini de la funció és el conjunt de valors que verifiquen $x \geq -1$ i $x < 2$, és a dir, el domini de la funció és l'interval $\square(D(f)=[-1,2) \mid [-1,2)=\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 2\} \mid)$.

Puntuació: 0,5 punts pel domini de l'arrel quadrada; 0,5 punts pel domini del logaritme neperià; 0,5 punts per expressar correctament el domini de la funció.

Q2.

SOLUCIÓ:

Substituint el punt $P(-3,5,0)$ en l'equació de la recta r .

$$(-3-1)/(-1)=(5+3)/2=4=(0+A)/1=A$$

Es té $A=4$

Substituint el punt $P(-3,5,0)$ en l'equació del pla

$$2x-4y-2z+30=-6-20-0+30=4=A$$

En tots dos casos, el valor de A obtingut és el mateix.

El vector director de la recta r és $d=(-1,2,1)$; el vector normal del pla és el vector $n=(2,-4,-2)$. Aquests dos vectors són paral·lels atès que $n=-2 \cdot d$.

Per tant, la recta i el pla són perpendiculars.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

Puntuació: a) 0,5 punts per la determinació correcta del valor de A; 0,5 punts per comprovar que el valor obtingut és el mateix en la recta i en el pla. b) 0,5 punts per la relació de paral·lelisme dels vectors director de la recta i normal del pla.

Q3.

SOLUCIÓ:

3.1.

a) $5a-3b=0$

3.2.

a) $a=75$ normals

3.3.

a) 282,5€

Puntuació: 0,5 punts per cada resposta correcta. Descompteu 0,25 punts per cada resposta incorrecta. Les qüestions no contestades no tenen cap descompte.

Q4.

SOLUCIÓ:

Restant les fraccions es té:

$$1/(x-1)-2/(2x-1)=((2x-1)-2(x-1))/(x-1)(2x-1)=1/(x-1)(2x-1)=1/3$$

És a dir:

$$(x-1)(2x-1)=3$$

$$2x^2-3x+1=3$$

$$2x^2-3x-2=0$$

Les dues solucions d'aquesta equació de segon grau són $x=(-1)/2$ i $x=2$.

Puntuació: 1,5 punts per la resolució correcta de l'equació. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les expressions algebraïques.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

Q5.

SOLUCIÓ:

El punt $P(-1,5)$ verifica l'equació de la recta: $y=2-3x=2-3(-1)=5$; per tant, la recta passa pel punt.

Els punts de la recta s'expressen com $Q(x,2-3x)$.

La distància de $P(-1,5)$ a $Q(x,2-3x)$ es calcula com

$$d=\|Q-P\|=\sqrt{((x+1)^2+(2-3x-5)^2)}$$

Per tant, s'ha de resoldre l'equació

$$\sqrt{((x+1)^2+(-3x-3)^2)}=\sqrt{10}$$

$$(x+1)^2+(-3x-3)^2=10$$

$$10x^2+20x+10=10$$

$$x^2+2x=0$$

Les dues solucions de l'equació són $x=0$ i $x=-2$. Dos punts de la recta r amb distància $\sqrt{10}$ de P són els punts $Q_1(0,2)$ i $Q_2(-2,8)$.

Puntuació: a) 0,5 punts. b) 0,5 punts per la caracterització dels punts de la recta i l'equació amb la distància; 0,5 per la resolució de l'equació. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en la resolució de l'equació.

Q6.

SOLUCIÓ:

El domini de la funció és $\mathbb{R}-\{-5\}$. Per tal de justificar que la funció és creixent, comprovarem que la seva derivada és positiva.

$$f'(x)=((2x+9) \cdot (x+5)-(x^2+9x+19) \cdot 1)/(x+5)^2=(x^2+10x+26)/(x+5)^2$$

En aquest quocient, el denominador sempre és positiu. El numerador és una paràbola orientada positivament que no s'anul·la en cap punt ($x^2+10x+26=0$ no té solució). Per tant, $x^2+10x+26>0$ en tot el domini.

Es verifica

$$f'(x)=(x^2+10x+26)/(x+5)^2>0$$



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre creixement i signe de la derivada. 0,5 punts pel càlcul correcte de la derivada. 0,5 punts per la justificació del signe de la derivada. En les respostes, no és necessari indicar el domini. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus en el càlcul de les derivades.

Part 2

[4 punts en total]

P1.

SOLUCIÓ:

Representem per x el nombre de persones addicionals a les 35 en el grup. Atès que la capacitat de l'autobús és de 50 persones, es té que $0 \leq x \leq 15$.

D'aquesta manera, la quantitat de persones en el grup és $q(x) = 35 + x$.

D'altra banda, la tarifa per persona és $p(x) = 55 - 1 \cdot x$.

Els ingressos de l'empresa es calculen com $I(x) = p(x) \cdot q(x) = (55 - x) \cdot (35 + x)$.

Observem que, quan el grup és de 35 persones ($x=0$), els ingressos són

$$I(0) = p(0) \cdot q(0) = (55) \cdot (35) = 1.925\text{€}$$

Quan l'autobús està ple ($x=15$), els ingressos són

$$I(15) = p(15) \cdot q(15) = (40) \cdot (50) = 2.000\text{€}$$

Per tal de determinar el màxim de la funció d'ingressos s'ha d'aplicar la condició necessària i determinar el valor de x que anul·la la primera derivada de la funció.

$$I'(x) = (-1) \cdot (35 + x) + (55 - x) \cdot (1) = 20 - 2x = 0$$

L'única solució és $x=10$.

Per tal de justificar que aquest valor correspon a un màxim de la funció (i no a un mínim, per exemple), s'ha d'aplicar la condició suficient, és a dir, que la segona derivada en aquest punt pren un valor negatiu.

En efecte, $I''(x) = -2$ (la segona derivada és negativa en tots els punts, no només en $x=10$).

Per tant, quan en l'autobús viatgen $q(10) = 35 + 10 = 45$ persones, cadascuna paga $p(10) = 55 - 10 = 45\text{€}$ i els ingressos màxims són de $I(10) = 45 \cdot 45 = 2.025\text{€}$.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

Puntuació: 1,5 punts per la construcció de la funció d'ingressos; 0,5 punts pel càlcul de la seva derivada. 0,5 punts per l'aplicació de la condició necessària i 0,5 punts per l'aplicació de la condició suficient. 1 punt per la interpretació dels resultats (nombre de passatgers, tarifa i ingrés màxim). Valoreu amb 1,5 punts un raonament correcte sobre el vèrtex d'una paràbola orientada negativament. Considereu vàlida també la condició suficient de primer ordre. Valoreu amb fins a 2 punts aquells exercicis que, sense ser correctes, resolen adequadament un problema d'optimització.

P2.

SOLUCIÓ:

De l'equació original es té

$$x + a - 2/(x-b) = ((x+a) \cdot (x-b) - 2)/(x-b) = (x^2 - 2x - 5)/(x-b)$$

Per tant

$$(x+a) \cdot (x-b) - 2 = x^2 - 2x - 5$$

$$x^2 + (a-b)x - ab - 2 = x^2 - 2x - 5$$

S'ha de resoldre el sistema:

$$\begin{cases} a-b = -2 \\ -ab-2 = -5 \end{cases}$$

De la primera equació es té $a = b - 2$. Substituint en la segona equació

$$-(b-2)b - 2 = -5$$

$$b^2 - 2b - 3 = 0$$

Les dues solucions d'aquesta equació i del sistema són:

$$b = -1, a = b - 2 = -1 - 2 = -3$$

$$b = 3, a = b - 2 = 3 - 2 = 1$$

Puntuació.- 2 punts per l'obtenció correcta d'un sistema de dues equacions i dues incògnites. 1 punt per la determinació correcta de cadascuna de les dues solucions del sistema. Penalitzeu amb fins a 2 punts les errades greus de càlcul. Valoreu de forma independent el plantejament del sistema de la seva resolució.