



SÈRIE 2

Part 1

Responen QUATRE de les sis qüestions següents.

[6 punts; 1,5 punts cada qüestió]

1.

SOLUCIÓ:

El domini de la funció és el conjunt de valors que permeten calcular la imatge de la funció (l'arrel quadrada i la divisió), és a dir, els valors de x que fan que es verifiquin simultàniament les dues condicions següents:

$$\frac{1-x}{x^2+4} \geq 0$$

$$x^2+4 \neq 0$$

Atès que $x^2+4 > 0$ per qualsevol valor de x , les dues condicions anteriors es redueixen a la condició $1-x \geq 0$, és a dir, $x \leq 1$.

Per tant, el domini de la funció és $\mathcal{D}(f) = (-\infty, 1]$.

Puntuació: 1 punt per les dues condicions del domini; 0,5 punts per la determinació correcta del domini. Penalitzeu amb 0,5 punts si no s'inclou el valor 1 en el domini.

2.

SOLUCIÓ:

a) En efecte, substituint el valor $x = \frac{1}{2}$ en el polinomi $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$ es té:

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 13\left(\frac{1}{2}\right) + 6 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{13}{2} + 6 = \frac{-12}{2} + 6 = 0$$

Per tant, $x = \frac{1}{2}$ és una arrel del polinomi.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

- b) Atès que $x = \frac{1}{2}$ és una arrel del polinomi, es pot factoritzar $P(x)$ de forma que $P(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot Q(x)$. Aplicant la regla de Ruffini es té:

	2	1	-13	6
$\frac{1}{2}$		1	1	6
	2	2	-12	0

És a dir, $P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (2x^2 + 2x - 12)$. Les altres dues arrels del polinomi són les solucions de l'equació $2x^2 + 2x - 12 = 0$; aquestes solucions són $x = 2$ i $x = -3$.

Puntuació: a) 0,5 punts; b) 0,5 punts per la factorització del polinomi i 0,5 punts per la determinació correcta de les altres dues arrels.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

3.

SOLUCIÓ:

3.1. $\boxed{a)} x - 2 = \frac{y+1}{2} = -z.$

L'opció c) correspon a l'equació d'un pla; el vector director de la recta de l'opció b), $v_3 = (2, -1, -1)$, no és proporcional al vector director de la recta r_1 , $v_1 = (1, 2, -1)$.

3.2. $\boxed{b)} a = 2.$

Quan $a = 2$, el vector director de la recta r_2 , $v_2 = (-1, -2, 1)$ és proporcional al vector director de la recta r_1 , $v_1 = (1, 2, -1)$.

3.3. $\boxed{a)} A = 1.$

Quan $A = 1$, el vector director de la recta r_1 , $v_1 = (1, 2, -1)$ és perpendicular al vector normal del pla π , $n = (3, -1, A) = (3, -1, 1)$ (per què $v_1 \cdot n = 0$), i per tant, la recta i el pla són paral·lels.

Puntuació: 0,5 punts per cada resposta correcta. Descompteu 0,25 punts per cada resposta incorrecta. Les qüestions no contestades no tenen cap descompte. Valoreu l'encert o errada en la resposta independentment del raonament que pugui haver-hi.

4.

SOLUCIÓ:

Dos vectors directores del pla determinat pels punts $P(2, 1, 0)$, $Q(2, -1, 0)$ i $R(-2, 1, 1)$ són $v_1 = P - Q = (0, 2, 0)$ i $v_2 = R - Q = (-4, 2, 1)$.

Una equació del pla que té aquests dos vectors directores i que passa per $P(2, 1, 0)$ està donada per

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

Desenvolupant el determinant es té:

$$2(x-2) + 8z = 2x + 8z - 4 = 0$$



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

Substituint el punt $S(2, a, 0)$ en aquesta equació, $2 \cdot 2 + 8 \cdot 0 - 4 = 0$, es comprova que sempre es verifica, és a dir, que el resultat obtingut no depèn del valor de a .

Per tant, els punts $S(2, a, 0)$ són punts del pla per a tots els valors de a .

Puntuació: 1 per la determinació d'una equació correcta del pla; 0,5 punts per la interpretació correcta sobre els valors del paràmetre a .

5.

SOLUCIÓ:

Calculem el determinant de la submatriu formada per les tres primeres files i columnes de M ; si aquest determinant és diferent de zero, aleshores la matriu té rang 3.

$$\det \begin{pmatrix} k & -4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix} = 4k - 12 - 24 + 12 + 12k - 8 = 16k - 32$$

Resolent l'equació $16k - 32 = 0$ es té $k = 2$. Per tant, si $k \neq 2$, aleshores el rang de la matriu és 3.

En el cas $k = 2$, es substitueix el valor en la matriu M , i resulta ser

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Es pot observar que les dues primeres columnes de la matriu són proporcionals.

Calculem el determinant de la submatriu formada per les tres últimes files i columnes de M .

$$\det \begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ -6 & 1 & 3 \end{pmatrix} = -24 + 6 + 4 + 12 = -2 \neq 0$$

Atès que aquest determinant és diferent de zero, el rang de la matriu també és 3 en el cas $k = 2$.

Per tant, per a tots els valors de k , el rang de la matriu M és 3.

Puntuació: 0,5 punts per la relació entre el determinant de les submatrius i el rang de la matriu; 0,5 punts pel càlcul correcte del primer menor i la interpretació del resultat;



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

0,5 punts per l'estudi del cas particular $k = 2$. Considereu correctes altres procediments (mètode de Gauss, per exemple) o altres seleccions alternatives dels menors que s'han de calcular i en quin ordre es calculen. No tingueu en compte els petits errors de càlcul, sempre que el procediment sigui vàlid i les interpretacions siguin coherents amb els resultats obtinguts.

6.

SOLUCIÓ:

La funció

$$F(x) = \frac{e^{-3x}}{-3} + 3 \frac{x^{-1}}{-1} = \frac{-e^{-3x}}{3} - \frac{3}{x}$$

és una primitiva de $f(x)$ per què $F'(x) = f(x)$.

Puntuació: 1 punt pel primer sumand de la primitiva; 0,5 punts pel segon.



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

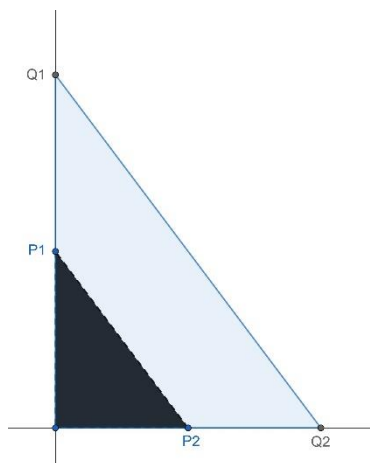
Part 2

Resoleu UN dels dos problemes següents.

[4 punts en total]

1.

SOLUCIÓ:



a) El triangle T_1 és un triangle rectangle

El seu perímetre és $p_1 = 4 + 3 + \sqrt{4^2 + 3^2} = 12$; la seva àrea és $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$.

b) El triangle T_2 també és un triangle rectangle.

El seu perímetre és $p_2 = A + B + \sqrt{A^2 + B^2} = 2 \cdot 12 = 24$; la seva àrea és

$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B = 4 \cdot 6 = 24.$$

S'ha de resoldre el sistema d'equacions

$$\begin{cases} A + B + \sqrt{A^2 + B^2} = 24 \\ A \cdot B = 48 \end{cases}$$

De la primera equació es té:

$$\sqrt{A^2 + B^2} = 24 - (A + B)$$

Elevant al quadrat:

$$A^2 + B^2 = (24 - (A + B))^2 = 24^2 - 48(A + B) + (A + B)^2$$



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

$$A^2 + B^2 = 24^2 - 48(A + B) + A^2 + B^2 + 2A \cdot B$$

Simplificant, l'equació s'expressa com

$$24^2 - 48(A + B) + 2A \cdot B = 0$$

Substituint la segona equació del sistema, $A \cdot B = 48$, l'equació queda de la forma

$$24^2 - 48(A + B) + 2 \cdot 48 = 576 - 48(A + B) + 96 = 672 - 48(A + B) = 0$$

D'aquesta equació es dedueix que $A + B = 14$.

És a dir, s'ha de resoldre el sistema

$$\begin{cases} A + B = 14 \\ A \cdot B = 48 \end{cases}$$

De la segona equació es té $B = \frac{48}{A}$; substituint en la primera equació

$$A + B = A + \frac{48}{A} = \frac{A^2 + 48}{A} = 14$$

S'ha de resoldre l'equació $A^2 - 14A + 48 = 0$.

Les solucions d'aquesta equació són $A = 8$ ($B = \frac{48}{A} = 6$) i $A = 6$ ($B = \frac{48}{A} = 8$).

Per tant, hi ha dos triangles que verifiquen les condicions:

- El triangle de vèrtexs $O(0,0)$, $Q_1(0,8)$ i $Q_2(6,0)$
- El triangle de vèrtexs $O(0,0)$, $Q_1(0,6)$ i $Q_2(8,0)$

Puntuació: a) 0,5 punts pel càlcul del perímetre; 0,5 punts pels càlcul de l'àrea. b) 0,5 punts per l'equació del perímetre; 0,5 punts per l'equació de l'àrea; 2 punts per la resolució correcta del sistema d'equacions. Valoreu amb fins dos punts la resolució correcta d'un sistema d'equacions, tant si el sistema és correcte com si no ho és, sempre que la solució obtinguda sigui coherent i consistent. Penalitzeu amb fins 1 punt les errades greus de càlcul. Cas que en la resposta s'argumenti que $Q_1 = 2P_1$ i $Q_2 = 2P_2$, s'ha de justificar que el triangle resultant té el doble del perímetre que el triangle original i que la seva àrea és quatre vegades més gran que la del triangle T_1 ; en aquest cas, valoreu amb un màxim de 2 punts l'apartat b).



Proves d'accés a la Universitat per a més grans de 25 anys 2024. Criteris d'avaluació

2.

SOLUCIÓ:

a) En efecte, el producte de les matrius resulta ser

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{pmatrix}$$

Aquesta matriu és el resultat d'intercanviar la primera i la segona columna de la matriu $\mathbf{M}$.

b) Multipliquem les matrius en l'ordre indicat:

$$\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

El resultat és l'intercanvi de la primera i la tercera fila de la matriu $\mathbf{M}$.

c) La matriu $\begin{pmatrix} h & g & i \\ e & d & f \\ b & a & c \end{pmatrix}$ és el resultat d'intercanviar la primera i la segona columna de

$\mathbf{M}$ i després intercanviar la primera i la tercera fila de la matriu obtinguda (o primer intercanviar la primera i la tercera fila de la matriu i després intercanviar la primera i la segona columna de la matriu obtinguda), és a dir,

$$\begin{pmatrix} h & g & i \\ e & d & f \\ b & a & c \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puntuació: a) 1 punt. b) 1 punt. c) 1 punt per descriure l'intercanvi de files i columnes; 1 punt per l'expressió correcta del producte matricial.